Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

# Analisi Matematica I

Pisa, 26 gennaio 2013

**Domanda 1** La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \log(1 + e^{-x^2})$

A) è iniettiva ma non surgettiva  B) è surgettiva ma non iniettiva

C) è bigettiva  D) non è né iniettiva né surgettiva

D

**Domanda 2** La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^4+1}{e^x + x^2}$

A) ha sia massimo che minimo  B) non ha né massimo né minimo

C) ha minimo ma non ha massimo  D) ha massimo ma non ha minimo

B

**Domanda 3** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{3}{n}}{\sin\left(\frac{2}{n}\right) - e^{\frac{1}{n}} + 1} =$

A) $-3$  B) $+\infty$  C) $0$  D) $-\dfrac{3}{2}$

A

**Domanda 4** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sin\frac{2}{n^2}\right)^{n^2-n} =$

A) 1  B) $+\infty$  C) $e^2$  D) 0

C

**Domanda 5** La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)^n n^3$

A) converge assolutamente  B) converge ma non converge assolutamente

C) diverge positivamente  D) è indeterminata

A

**Domanda 6** La serie $\displaystyle\sum_{n} \frac{n^2+2n}{n!}$

A) diverge positivamente  B) converge assolutamente  C) diverge negativamente  D) è indeterminata

B

**Domanda 7** $\displaystyle\int_0^\pi 3x\cos x\,dx =$

A) -6  B) 0  C) $\dfrac{3}{2}$  D) $\pi$

A

**Domanda 8** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$

A) diverge negativamente  B) converge  C) non esiste  D) diverge positivamente

B

**Domanda 9** La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\log(1+x^2)}{x^2+4x}$

A) ha un asintoto verticale  B) non ha asintoti

C) ha un asintoto orizzontale  D) ha un asintoto obliquo

C

**Domanda 10** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$

A) non esiste  B) converge  C) diverge positivamente  D) diverge negativamente

B

**codice 941636**

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

# Analisi Matematica I

Pisa, 26 gennaio 2013

**Domanda 1** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$

A) converge  B) diverge negativamente  C) diverge positivamente  D) non esiste

A

**Domanda 2** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sin\frac{2}{n^2}\right)^{n^2-n} =$

A) $+\infty$  B) 1  C) $e^2$  D) 0

C

**Domanda 3** La funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{x^4+1}{e^x+x^2}$

A) ha minimo ma non ha massimo  B) ha massimo ma non ha minimo
C) non ha né massimo né minimo  D) ha sia massimo che minimo

C

**Domanda 4** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$

A) diverge negativamente  B) diverge positivamente  C) non esiste  D) converge

D

**Domanda 5** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{3}{n}}{\sin\left(\frac{2}{n}\right)-e^{\frac{1}{n}}+1} =$

A) $-3$  B) $+\infty$  C) $-\dfrac{3}{2}$  D) 0

A

**Domanda 6** L'insieme $\{x\in\mathbb{R}: x^2>|3x-1|\}$

A) non è limitato né superiormente né inferiormente  B) è limitato inferiormente ma non superiormente
C) è limitato superiormente ma non inferiormente  D) è limitato

A

**Domanda 7** $\displaystyle\int_0^{\pi} 3x\cos x\,dx =$

A) 0  B) -6  C) $\pi$  D) $\dfrac{3}{2}$

B

**Domanda 8** La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\,\log(1+x^2)}{x^2+4x}$

A) ha un asintoto verticale  B) ha un asintoto obliquo  C) non ha asintoti
D) ha un asintoto orizzontale

D

**Domanda 9** La funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^2\log(1+e^{-x^2})$

A) non è né iniettiva né surgettiva  B) è surgettiva ma non iniettiva
C) è iniettiva ma non surgettiva  D) è bigettiva

A

**Domanda 10** Il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-\left(\frac{4}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{6}{5}\right)^n-\left(\frac{5}{4}\right)^n}$

A) vale $+\infty$  B) vale 0  C) vale $\dfrac{5}{2}$  D) vale $-\infty$

D

**codice III anno**

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

# Analisi Matematica I

Pisa, 26 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1** Studiare la funzione
$$f(x) = (x^2-3)e^{x+5}$$
determinandone insieme di definizione, asintoti, punti di massimo o minimo locali, massimo e minimo assoluti o estremi superiore e inferiore, intervalli di convessità.

**Soluzione**

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$, dove è derivabile infinite volte, quindi anche continua.
$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3)e^{x+5} = +\infty\, e^{+\infty} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-3)e^{x+5} = \lim_{t\to+\infty}((-t)^2-3)e^{-t+5} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-3}{e^{t-5}} = 0$$
dove l'ultimo limite è stato ottenuto applicando 2 volte il teorema di de L'Hôpital (o semplicemente ricordando gli ordini di infinito). La funzione ha quindi l'asintoto orizzontale di equazione $y=0$ per $x\to-\infty$. Vediamo ora se ha un asintoto obliquo.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-3)}{x}\,e^{x+5} = +\infty$$
quindi non vi è nessun asintoto obliquo.

Calcoliamo la derivata per trovare gli intervalli di monotonia.
$$f'(x) = 2xe^{x+5} + (x^2-3)e^{x+5} = e^{x+5}(x^2+2x-3).$$
Il segno di $f'$ è determinato unicamente da quello del trinomio $x^2+2x-3$, essendo l'esponenziale una funzione sempre positiva.
$$x^2+2x-3=0 \iff x=-3 \text{ oppure } x=1$$
quindi
$$f'(x)>0 \iff x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty).$$
La funzione è quindi crescente in $(-\infty,-3]$, decrescente in $[-3,1]$ e di nuovo crescente in $[1,+\infty)$. Il punto $x=-3$ è di massimo locale mentre $x=1$ è di minimo locale. Dato che $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ e che $f(1)=-2e^6<0$ risulta che il minimo della funzione è proprio $-2e^6$. La funzione non ha massimo in quanto $\sup(f)=+\infty$.

Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda.
$$f''(x) = e^{x+5}(x^2+2x-3)+e^{x+5}(2x+2) = e^{x+5}(x^2+4x-1).$$
Anche in questo caso, il segno di $f''(x)$ è determinato solo da quello del trinomio $x^2+4x-1$.
$$x^2+4x-1=0 \iff x=-2-\sqrt{5} \text{ oppure } x=-2+\sqrt{5}.$$
Avremo allora che
$$f''(x)>0 \iff x\in\left(-\infty,-2-\sqrt{5}\right)\cup\left(-2+\sqrt{5},+\infty\right)$$
e, di conseguenza, la funzione è convessa in $\left(-\infty,-2-\sqrt{5}\,\right]$, concava in $\left[-2-\sqrt{5},-2+\sqrt{5}\,\right]$ e di nuovo convessa in $\left[-2+\sqrt{5},+\infty\right)$. I punti di ascissa $x=-2-\sqrt{5}$ e $x=-2+\sqrt{5}$ sono punti di flesso.

**Esercizio 2** Determinare per quali valori del parametro $\alpha>0$ il seguente integrale è convergente
$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x^\alpha)}{x^3+|\sin(x^{3\alpha})|}\,dx.$$

**Soluzione**

Osserviamo che la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione, possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Il denominatore si annulla solo per $x = 0$, quindi studieremo l'andamento asintotico per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to +\infty$ risulta $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$ e $|\sin(x^{3\alpha})|$ è limitata, quindi

$$\frac{\arctan(x^\alpha)}{x^3 + |\sin(x^{3\alpha})|} \sim \frac{1}{x^3}$$

che ha integrale convergente per $x \to +\infty$. Per $x \to +\infty$ l'integrale converge quindi per ogni $\alpha > 0$.

Per $x \to 0^+$ risulta che $x^\alpha \to 0$ quindi

$$\arctan(x^\alpha) \sim x^\alpha$$

$$|\sin(x^{3\alpha})| \sim x^{3\alpha}$$

e, di conseguenza

$$\frac{\arctan(x^\alpha)}{x^3 + |\sin(x^{3\alpha})|} = \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^3 + x^{3\alpha} + o(x^{6\alpha})}.$$

Se $3\alpha \geq 3$, quindi $\alpha \geq 1$, allora $x^3 + x^{3\alpha} + o(x^{6\alpha}) \sim x^3$ quindi

$$\frac{\arctan(x^\alpha)}{x^3 + |\sin(x^{3\alpha})|} \sim \frac{x^\alpha}{x^3} = \frac{1}{x^{3-\alpha}}$$

e quest'ultima funzione ha integrale convergente per $x \to 0^+$ se e solo se

$$3 - \alpha < 1 \qquad \Longleftrightarrow \alpha > 2.$$

Quindi l'integrale converge per $x \to 0^+$ almeno per $\alpha \in (2, +\infty)$.

Nel caso $3\alpha < 3$, quindi $\alpha < 1$, isulta invece $x^3 + x^{3\alpha} + o(x^{6\alpha}) \sim x^{3\alpha}$, quindi

$$\frac{\arctan(x^\alpha)}{x^3 + |\sin(x^{3\alpha})|} \sim \frac{x^\alpha}{x^{3\alpha}} = \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

con integrale convergente per $x \to 0^+$ se e solo se

$$2\alpha < 1 \qquad \Longleftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}.$$

Ne segue che l'integrale converge per $x \to 0^+$ anche nel caso $\alpha < \frac{1}{2}$.

Concludendo, l'integrale dato converge se e solo se

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

**Esercizio 3** Determinare per quali valori del parametro $\alpha > -2$ la seguente serie converge o converge assolutamente

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(\log(2+\alpha))^n}{\sqrt{n}}.$$

**Soluzione**

Osserviamo che, per certi valori del parametro $\alpha$, i termini della serie sono a segno variabile. Esaminiamo prima la convergenza assoluta, considerando quindi

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\log(2+\alpha)|^n}{\sqrt{n}}.$$

Utilizziamo il criterio della radice ottenendo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\log(2+\alpha)|^n}{\sqrt{n}}} = \frac{|\log(2+\alpha)|}{1}.$$

La serie data quindi converge assolutamente se

$$|\log(2+\alpha)| < 1 \iff -1 < \log(2+\alpha) < 1 \iff \frac{1}{e} - 2 < \alpha < e - 2.$$

Se $\alpha < \frac{1}{e} - 2$ oppure $\alpha > e - 2$ viene a mancare la condizione necessaria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log(2+\alpha))^n}{\sqrt{n}} = 0$$

quindi la serie non converge e, a maggior ragione, non converge assolutamente. Se $\alpha = e - 2$ allora

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(\log(2+\alpha))^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \left| \frac{(\log(2+\alpha))^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che è divergente. Se $\alpha = \frac{1}{e} - 2$ allora

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(\log(2+\alpha))^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Dato che la successione $\frac{1}{\sqrt{n}}$ è decrescente e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, per il criterio di Leibniz, la serie converge. Invece, sempre per $\alpha = \frac{1}{e} - 2$,

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{(\log(2+\alpha))^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che è divergente.

La serie data converge assolutamente se $\alpha \in \left(\frac{1}{e} - 2, e - 2\right)$ e converge se $\alpha \in \left[\frac{1}{e} - 2, e - 2\right)$.

**Esercizio 4** Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{e^n - 3^{n\log n}}{n^n}.$$

**Soluzione**

Osserviamo che

$$3^{n\log n} = e^{n\log n \log 3} = n^{n\log 3}$$

quindi

$$\frac{e^n - 3^{n\log n}}{n^n} = \frac{e^n - n^{n\log 3}}{n^n} = \frac{e^n}{n^n} - \frac{n^{n\log 3}}{n^n}.$$

Esaminiamo separatamente i due addendi.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} e^{n - n\log n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n\log 3}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} n^{(n\log 3) - n} = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 - (+\infty) = -\infty.$$