Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 7 gennaio 2013

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}(\arctan x + e^{-x^2}\cos x)$

A) ha un asintoto verticale B) ha un asintoto orizzontale
C) ha un asintoto obliquo D) non ha limite per $x \to +\infty$

C

Domanda 2 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \sin\frac{1}{n}\right)\log n$

A) diverge negativamente B) diverge positivamente
C) converge ma non converge assolutamente D) converge assolutamente

D

Domanda 3 L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x < 0\right\}$ è

A) limitato B) limitato inferiormente ma non superiormente
C) limitato superiormente ma non inferiormente D) un intervallo

C

Domanda 4 Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \log(1+x^4) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

A) è continua se e solo se $\alpha \geq -4$ B) è continua se e solo se $\alpha \geq 0$
C) non è mai continua D) è continua se e solo se $\alpha > -4$

D

Domanda 5 L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sin\sqrt[3]{x})^4}{e^{2x}(1-\cos x)}\,dx$

A) non esiste B) converge C) diverge positivamente D) diverge negativamente

B

Domanda 6 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{2^n}\sin\frac{1}{n}$

A) converge ma non converge assolutamente B) diverge positivamente
C) converge assolutamente D) diverge negativamente

C

Domanda 7 La successione $a_n = \dfrac{n^2 + n^5 + \frac{1}{n+1}}{n + \sqrt{n^{16}+1}}$

A) è debolmente crescente e non limitata B) è limitata
C) è strettamente crescente e limitata superiormente D) è limitata inferiormente ma non superiormente

B

Domanda 8

$$\int_0^{+\infty}(\cos\sqrt{x})\left(\sin\frac{1}{x^3}\right)dx$$

A) converge B) diverge positivamente C) non esiste D) diverge negativamente

A

Domanda 9 Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^{(\sin x)^2}\frac{t}{1+t^4}\,dt$. Allora risulta che

A) F ha un punto di massimo locale per $x = 0$ B) F ha un punto di minimo locale per $x = 1$
C) F ha un punto di massimo locale per $x = 1$ D) F ha un punto di minimo locale per $x = 0$

D

Domanda 10 La successione $a_n = \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^{1-\cos\frac{1}{n}}$, definita per $n \geq 1$,

A) non ha limite B) tende a $+\infty$ C) tende a 0 D) tende a 1

D

codice 517318

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 7 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{\sqrt[3]{x^2-1}}\, dx$$

converge.

Soluzione

Osserviamo che nell'intervallo di integrazione, la funzione integranda è sempre positiva. Applicheremo il criterio del confronto asintotico. Controlliamo l'andamento della funzione per $x \to 1^+$. Dallo sviluppo di Taylor del logaritmo otteniamo che

$$\log x = \log(1 + (x-1)) = (x-1) + o(x-1)$$

quindi $(\log x)^\alpha \sim (x-1)^\alpha$. Inoltre

$$\sqrt[3]{x^2-1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} \sim (x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Quindi la funzione integranda è asintotica a

$$\frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}-\alpha}}$$

e quest'ultima funzione ha integrale convergente in un intorno del punto 1 se e solo se

$$\frac{1}{3} - \alpha < 1, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > -\frac{2}{3}.$$

Quando $x \to +\infty$ invece, si ottiene che

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

La funzione integranda è quindi asintotica a

$$\frac{(\log x)^\alpha}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(\log x)^{-\alpha}}$$

il cui integrale all'infinito diverge per ogni valore di α. Si tratta infatti di un integrale del tipo

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^\beta (\log x)^\alpha}\, dx$$

che diverge positivamente quando $\beta < 1$, indipendentemente dal valore di α. Ne segue che l'integrale cercato è divergente per ogni valore di α.

Esercizio 2 Studiare la funzione $f(x) = e^{\arctan|x^2-4|}$, determinandone insiemi di continuità e derivabilità, eventuali asintoti, punti di massimo o minimo locali, estremi superiore e inferiore, massimo o minimo.

Soluzione

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è continua in tutto il suo insieme di definizione. La funzione è inoltre pari.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Per simmetria ottenaimo subito che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

La funzione presenta quindi l'asintoto orizzontale di equazione $y = e^{\frac{\pi}{2}}$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Osserviamo ora che

$$x^2 - 4 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} e^{\arctan(x^2-4)} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ e^{\arctan(4-x^2)} & \text{se } x \in [-2, 2]. \end{cases}$$

Ne segue che la funzione è sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ e la sua derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\arctan(x^2-4)} \dfrac{2x}{(x^2-4)^2+1} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ \\ e^{\arctan(4-x^2)} \dfrac{-2x}{(4-x^2)^2+1} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

Dato che la funzione è continua nel punto $x = 2$ otteniamo che

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = e^{\arctan 0} \frac{-4}{1} = -4$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = e^{\arctan 0} \frac{4}{1} = 4.$$

La funzione non è quindi derivabile in $x = 2$ e, per simmetria, neanche in $x = -2$. Dallo studio del segno della derivata, si ottiene che la f è crescente in $[-2, 0]$ e in $[2, +\infty)$ mentre è decrescente in $(-\infty, -2]$ e in $[0, 2]$. I punti $x = -2$ e $x = 2$ sono punti di minimo assoluto, mentre il punto $x = 0$ è di massimo locale. Il minimo assoluto vale $f(2) = f(-2) = 1$. Risulta inoltre

$$f(0) = e^{\arctan 4} < e^{\frac{\pi}{2}}$$

quindi la funzione non ha massimo e

$$\sup(f) = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 1} \left(e^2 - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right).$$

Soluzione

Ricordiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $x \to 0$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

che utilizzeremo rispettivamente con $x = \frac{2}{n}$ e $x = -\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$e^2 - \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2 - e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} = e^2\left(1 - e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)-2}\right) = e^2\left(1 - e^{n\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-2}\right)$$

$$= e^2\left(1 - e^{-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = e^2\left(1 - \left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \frac{2e^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ne segue che il termine generale della serie è definitivamente positivo e asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n}$. Per il criterio del confronto asintotico la serie è quindi positivamente divergente.