Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 10 settembre 2012

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + e^x$

A) non è né iniettiva né surgettiva B) è iniettiva ma non surgettiva

C) è surgettiva ma non iniettiva D) è bigettiva

D

Domanda 2 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^x$

A) ha sia massimo che minimo B) è limitata inferiormente ma non ha minimo

C) ha minimo ma non ha massimo D) non ha né massimo né minimo

C

Domanda 3

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{x^2-1}\,\log x} =$$

A) $+\infty$ B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

C) $\dfrac{4}{3}$ D) 0

B

Domanda 4

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} =$$

A) 2 B) $+\infty$

C) 4 D) 0

D

Domanda 5 La successione $a_n = (n^2 + \cos n) \sin \dfrac{1}{n^2}$

A) non ha limite ma è limitata B) non ha limite e non è limitata

C) ha limite finito D) è limitata inferiormente ma non superiormente

C

Domanda 6

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}-x^2}{(\sin x)^2}\,dx$$

A) converge B) non esiste

C) diverge negativamente D) diverge positivamente

D

Domanda 7 La funzione $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\int_1^x e^{(t^3)}\,dt$

A) è concava in tutto $\mathbb{R}$ B) è convessa in tutto $\mathbb{R}$

C) ha un punto di flesso per $x=0$ D) ha un punto di flesso per $x=1$

B

Domanda 8

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx$$

A) converge B) diverge positivamente

C) diverge negativamente D) non esiste

A

Domanda 9 La serie $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$

A) converge semplicemente ma non assolutamente B) converge assolutamente

C) diverge positivamente D) diverge negativamente

A

Domanda 10 La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{(n^2)}}{n^{3n}}$

A) converge assolutamente B) converge semplicemente ma non assolutamente

C) diverge positivamente D) è indeterminata

C

codice 105547

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 10 settembre 2012

Domanda 1

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}\right) =$$

A) 4 B) $\frac{4}{3}$ C) 0 D) $+\infty$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}-x^2}{(\sin x)^2}\,dx$$

A) converge B) diverge positivamente C) non esiste

D) diverge negativamente

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 3 La funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x+e^x$

A) è iniettiva ma non surgettiva

B) è bigettiva C) è surgettiva ma non iniettiva D) non è né iniettiva né surgettiva

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 4 La funzione $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\int_1^x e^{(t^3)}\,dt$

A) ha un punto di flesso per $x=1$ B) è concava in tutto $\mathbb{R}$

C) ha un punto di flesso per $x=0$ D) è convessa in tutto $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 5

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{x^2-1}\,\log x} =$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

C) 0 D) $+\infty$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 6

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} =$$

A) 0 B) $+\infty$

C) 4 D) 2

A

Domanda 7

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx$$

A) diverge negativamente B) non esiste C) converge D) diverge positivamente

C

Domanda 8 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^x$

A) non ha né massimo né minimo B) ha sia massimo che minimo

C) è limitata inferiormente ma non ha minimo

D) ha minimo ma non ha massimo

D

Domanda 9 La funzione $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan(\arcsin x)$

A) non è né iniettiva né surgettiva B) è iniettiva ma non surgettiva

C) è surgettiva ma non iniettiva D) è bigettiva

D

Domanda 10 La successione $a_n = (n^2 + \cos n) \sin \frac{1}{n^2}$

A) è limitata inferiormente ma non superiormente B) non ha limite e non è limitata

C) non ha limite ma è limitata D) ha limite finito

D

codice II anno

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 10 settembre 2012

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 (**Solo I anno**) Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(\alpha-4)^{n+1}}{n\,5^{2n}}$$

converge o converge assolutamente.

Soluzione

Vediamo prima la convergenza assoluta. Utilizziamo il criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(\alpha-4)^{n+1}}{n\,5^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-4|}{5^2} \sqrt[n]{\frac{|\alpha-4|}{n}} = \frac{|\alpha-4|}{25}.$$

La serie convergerà assolutamente se

$$\frac{|\alpha-4|}{25} < 1$$

cioè se

$$|\alpha-4| < 25 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -21 < \alpha < 29.$$

Sempre dal criterio della radice otteniamo che la serie non converge assolutamente se $\alpha < -21$ oppure se $\alpha > 29$. Per $\alpha = -21$ e $\alpha = 29$ la serie dei valori assoluti diventa

$$\sum_{n\geq 1} \frac{25^{n+1}}{n\,25^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{25}{n}$$

che diverge.

Per quanto riguarda la convergenza semplice, è implicata dalla convergenza assoluta se $-21 < \alpha < 29$.

Se $\alpha = -21$ la serie diventa

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-25)^{n+1}}{n\,25^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}25}{n}$$

che converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione $\frac{25}{n}$ è decrescente e infinitesima. Se $\alpha = 29$ la serie invece diventa

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(25)^{n+1}}{n\,25^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{25}{n}$$

che diverge. Per i valori di $\alpha < -21$ oppure $\alpha > 29$ viene a mancare la condizione necessaria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha-4)^{n+1}}{n\,5^{2n}} = 0$$

quindi la serie non converge.

Esercizio 2 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, massimo e minimo oppure estremi superiore e inferiore, asintoti orizzontali, verticali e obliqui, punti di massimo o minimo locali e intervalli di convessità.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$ e in tutto l'insieme di definizione è continua e derivabile perché è composizione e prodotto di funzioni continue e derivabili. A tal proposito si deve osservare che la funzione radice quadrata non è derivabile quando l'argomento vale 0, ma $2x^2+1>0$ per ogni x, quindi, in questo caso la composizione di funzioni è derivabile. Osserviamo anche che la funzione è dispari. Consideriamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{2}.$$

Data la simmetria della funzione otteniamo subito che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\sqrt{2}.$$

Da questi risultati deduciamo che la f non ha nè massimo nè minimo e che

$$\inf(f) = -\infty \qquad \sup(f) = +\infty.$$

Inoltre la funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = 0$, un asintoto orizzontale di equazione $y = \sqrt{2}$ per $x \to +\infty$ e un altro asintoto orizzontale di equazione $y = -\sqrt{2}$ per $x \to -\infty$. Data la presenza degli asintoti orizzontali, non ci sono asintoti obliqui. Vediamo ora la derivata.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}\,x - \sqrt{2x^2+1}}{x^2} = \frac{-1}{x^2\,\sqrt{2x^2+1}}.$$

Il segno della derivata è sempre strettamente negativo, quindi la funzione è strettamente decrescente sulle semirette $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$. Non ci sono punti di massimo o minimo locali. Per la convessità, calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{2x\sqrt{2x^2+1} + x^2\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}}{x^4(2x^2+1)} = \frac{2(3x^2+1)}{x^3(2x^2+1)^{3/2}}.$$

Lo studio del segno è immediato e risulta che

$$f''(x) < 0 \iff x < 0, \qquad f''(x) > 0 \iff x > 0$$

quindi f è concava sulla semiretta $(-\infty, 0)$ e convessa sulla semiretta $(0, +\infty)$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{x^3 + |x^3| + 9}\, dx.$$

Soluzione

Osserviamo che x^3 cambia segno per $x = 0$ quindi

$$\int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{x^3 + |x^3| + 9}\, dx = \int_{-1}^{0} x^2 \sqrt{x^3 - x^3 + 9}\, dx + \int_{0}^{2} x^2 \sqrt{x^3 + x^3 + 9}\, dx.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali.

$$\int_{-1}^{0} x^2 \sqrt{9}\, dx = 3 \int_{-1}^{0} x^2\, dx = 3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 1.$$

Eseguendo la sostituzione $x^3 = t$ otteniamo

$$\int_{0}^{2} x^2 \sqrt{2x^3 + 9}\, dx = \int_{0}^{8} \frac{\sqrt{2t + 9}}{3}\, dt = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3}(2t + 9)^{3/2}\, \frac{1}{2}\right]_{0}^{8} = \frac{1}{9} \left(25^{3/2} - 9^{3/2}\right) = \frac{1}{9}(5^3 - 3^3) = \frac{98}{9}.$$

L'integrale cercato si ottiene sommando i due risultati, quindi vale $\dfrac{107}{9}$.