Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 14 luglio 2012

Domanda 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{1+3n}} =$$

A) $+\infty$ B) $-\infty$

C) 3 D) 0

D

Domanda 2 La successione $a_n = \left(\cos \dfrac{n\pi - \sin\frac{2}{n}}{n+3}\right) \tan\sqrt{\dfrac{3+(-1)^n}{n^2\cos\frac{1}{n}}}$

A) è a segni alternati B) è limitata superiormente ma non inferiormente

C) è limitata D) è limitata inferiormente ma non superiormente

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x(2 + \sin x)$

A) ha minimo ma non ha massimo B) ha infiniti punti di massimo locale

C) non ha né massimo né minimo D) non è limitata inferiormente

C

Domanda 4 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x| - |x - 2|$

A) non è limitata né superiormente né inferiormente

B) è limitata superiormente ma non inferiormente

C) è limitata inferiormente ma non superiormente D) è limitata

D

Domanda 5 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin\left(e^{-x^2}\right)$

A) ha infiniti punti di minimo locale B) è debolmente crescente

C) non ha minimo D) non ha massimo

C

Domanda 6

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

A) non esiste B) converge

C) diverge positivamente D) diverge negativamente

$\boxed{C}$

Domanda 7

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sin x - |x|}\, dx$$

A) converge B) diverge positivamente

C) non esiste D) diverge negativamente

$\boxed{A}$

Domanda 8

$$\int_0^2 x e^{x^2}\, dx =$$

A) $\dfrac{e^4-1}{2}$ B) $\dfrac{e^2-1}{2}$

C) e^4-1 D) e^8-1

$\boxed{A}$

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{5n+2\sin n}$

A) converge assolutamente B) diverge positivamente

C) diverge negativamente D) converge ma non converge assolutamente

$\boxed{D}$

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_{n} \frac{2+e^{2n}}{n!}$

A) diverge positivamente B) converge assolutamente

C) converge ma non converge assolutamente D) è indeterminata

$\boxed{B}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 14 luglio 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Si determinino i valori del parametro $\alpha > 0$ per i quali la serie

$$\sum_n \frac{(3\log\alpha)^n}{2n+\cos n}$$

converge o converge assolutamente.

Soluzione

Studiamo prima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|3\log\alpha|^n}{|2n+\cos n|}} = |3\log\alpha|$$

dato che

$$2n-1 \leq 2n+\cos n \leq 2n+1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1} = 1.$$

Per il criterio della radice, la serie converge assolutamente se

$$|3\log\alpha| < 1 \iff -1 < 3\log\alpha < 1 \iff -\frac{1}{3} < \log\alpha < \frac{1}{3} \iff \frac{1}{\sqrt[3]{e}} < \alpha < \sqrt[3]{e}$$

Se $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ la serie diventa

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{2n+\cos n}$$

che converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione $a_n = \frac{1}{2n+\cos n}$ è decrescente e infinitesima. Per verificare la decrescenza basta considerare la funzione $f(x) = 2x + \cos x$ e derivarla, ottenendo $f'(x) = 2 - \sin x > 0$. Invece la serie dei valori assoluti per $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ diventa

$$\sum_n \frac{1}{2n+\cos n}$$

che diverge per il criterio del confronto asintotico dato che

$$\frac{1}{2n+\cos n} \sim \frac{1}{n}.$$

Per $\alpha = \sqrt[3]{e}$ la serie diventa
$$\sum_n \frac{1}{2n + \cos n}$$
che, come abbiamo visto in precedenza, diverge. Per tutti gli altri valori di α la serie non converge perché viene a mancare la condizione necessaria
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3\log\alpha)^n}{2n+\cos n} = 0.$$
Qundi la serie converge per $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \sqrt[3]{e}\right)$ e converge assolutamente per $\alpha \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \sqrt[3]{e}\right)$.

Esercizio 2 Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{1 - x^2}$$
determinandone insieme di definizione, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo o minimo locali, eventuali asintoti (verticali, orizzontali e obliqui), intervalli di monotonia e di convessità.

Soluzione

La funzione non è definita per $x = -1$ e per $x = 1$ in quanto il denominatore si annulla. Per $x = 1$ si annulla anche il numeratore, che quindi è divisibile per $x - 1$. Effettuando la divisione tra polinomi, otteniamo che
$$x^3 - 3x + 2 = (x^2 + x - 2)(x - 1).$$
Per $x \neq 1$ possiamo quindi scrivere la funzione come
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{(x^2 + x - 2)(x - 1)}{(1 + x)(1 - x)} = \frac{-x^2 - x + 2}{1 + x}.$$
Passiamo ora a valutare i limiti.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{-x^2 - x + 2}{1 + x} = \frac{0}{2} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
La funzione presenta quindi un asintoto verticale di equazione $x = -1$ e può essere prolungata con continuità nel punto $x = 1$, ponendola uguale a 0. Vediamo ora se ci sono asintoti obliqui.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 + x} = -1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{(1 + x)x} = 0$$

quindi è presente l'asintoto obliquo di equazione $y = -x$.
Studiamo ora la derivata. Per ogni $x \neq 1, x \neq -1$ risulta

$$f'(x) = \frac{(-2x-1)(1+x) - (-x^2 - x + 2)}{(1+x)^2} = -\frac{x^2 + 2x + 3}{(1+x)^2} < 0$$

in quanto il numeratore non cambia mai segno. La funzione è quindi strettamente decrescente sulla semiretta $(-\infty, -1)$, nell'intervallo $(-1, 1)$ e sulla semiretta $(1, +\infty)$. Non ci sono quindi punti di massimo o minimo locali. L'estremo superiore di f è $+\infty$ e l'estremo inferiore è $-\infty$.

Vediamo ora la convessità. Se $x \neq -1, x \neq 1$ si ha che

$$f''(x) = -\frac{(2x+2)(1+x)^2 - (x^2 + 2x + 3)2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{4x+4}{(1+x)^4} = \frac{4}{(1+x)^3}.$$

Ne segue che $f''(x) > 0$ se $x > -1$ e $f''(x) < 0$ se $x < -1$. La funzione sarà quindi concava sulla semiretta $(-\infty, -1)$, convessa sull'intervallo $(-1, 1)$ e ancora convessa sulla semiretta $(1, +\infty)$. Per concludere, osserviamo che la funzione "prolungata" su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 - x + 2}{1+x} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

risulta, non solo continua, ma derivabile due volte. Tale funzione è strettamente decrescente sulle semirette $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$, concava in $(-\infty, -1)$ e convessa in $(-1, +\infty)$.

Esercizio 3 Stabilire se l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

converge e, in caso affermativo, calcolarne il valore.

Soluzione

Osserviamo subito che la funzione integranda è positiva, quindi possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico. Dallo sviluppo di Taylor in 0 della funzione arcotangente otteniamo che

$$\frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^4}$$

per $x \to +\infty$, quindi l'integrale converge (la funzione integranda è limitata su $[1, +\infty)$ quindi non ci sono altri punti da analizzare). Calcoliamo ora l'integrale trovando una primitiva. Eseguiamo la sostituzione

$$\frac{1}{x} = t, \qquad \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\int t \arctan t \, dt$$

Eseguiamo ora questo integrale per parti, derivando $\arctan t$ e integrando t

$$-\int t \arctan t \, dt = -\frac{t^2}{2} \arctan t + \int \frac{t^2}{2(1+t^2)} \, dt = -\frac{t^2}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+t^2} \, dt$$
$$= -\frac{t^2}{2} \arctan t + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \arctan t + c$$

quindi, ricordando che $t = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \, dx = -\frac{1}{2x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + c.$$

Ne segue che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \, dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^M =$$
$$\lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{2M^2} \arctan\left(\frac{1}{M}\right) + \frac{1}{2M} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{M}\right) - \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$