Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 23 giugno 2012

Domanda 1 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : (\log x)^2 - 2\log x > 0\}$. Allora

A) $\inf(A) = 1$ B) $\inf(A) = -\infty$

C) $\inf(A) = e^2$ D) $\inf(A) = 0$

D

Domanda 2 Sia $A = \left\{\cos\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\right\}$. Allora

A) A non ha minimo B) $\min(A) = 0$

C) $\min(A) = \cos 1$ D) $\max(A) = 1$

C

Domanda 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n-1}} =$

A) $-\infty$ B) $+\infty$

C) 0 D) $\frac{1}{2}$

C

Domanda 4 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{5n + \sin\left(\frac{n}{3}\right)}$

A) converge assolutamente B) converge semplicemente ma non assolutamente

C) diverge positivamente D) diverge negativamente

B

Domanda 5 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5x^2\left(1 - \cos\frac{3}{x}\right) =$

A) non esiste B) $\frac{45}{2}$

C) $+\infty$ D) $\frac{15}{2}$

B

Domanda 6 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{4x^2 + e^x}{x^3}$

A) non ha minimo ma è inferiormente limitata B) ha massimo

C) non è inferiormente limitata D) ha minimo

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 7 La serie $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{(\sin n)^{(n^2)}}{n(\log n)^2}$

A) converge assolutamente B) converge semplicemente ma non assolutamente

C) diverge positivamente D) diverge negativamente

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 8 La funzione $F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_2^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt & \text{se } x > 2 \\ x - 2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

A) è continua ma non derivabile in $x = 2$ B) è derivabile in $x = 2$

C) non è continua in $x = 2$ D) è derivabile ma non è continua in $x = 2$

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 9 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 9}}$

A) converge B) diverge positivamente

C) non esiste D) diverge negativamente

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 10 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x \cos(x^2)\, dx =$

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) 1

C) $\sin\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}\right)$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{\text{D}}$

codice 497233

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 23 giugno 2012

Domanda 1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5x^2\left(1-\cos\frac{3}{x}\right)=$

A) $\frac{15}{2}$ B) non esiste

C) $+\infty$ D) $\frac{45}{2}$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 2 Sia $A=\{x\in\mathbb{R} : (\log x)^2-2\log x>0\}$. Allora

A) $\inf(A)=1$ B) $\inf(A)=e^2$

C) $\inf(A)=-\infty$ D) $\inf(A)=0$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 3 Sia $A=\left\{e^{\arcsin\left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}}\right)} : n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\}$. Allora

A) $\max(A)=e$ B) $\max(A)=e^{\frac{\pi}{2}}$

C) A non ha massimo e $\sup(A)=e$ D) A non ha massimo e $\sup(A)=e^{\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 4 La funzione $F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_2^x \frac{e^t-1}{t}\,dt & \text{se } x>2\\ x-2 & \text{se } x\leq 2\end{cases}$

A) è derivabile ma non è continua in $x=2$ B) non è continua in $x=2$

C) è derivabile in $x=2$ D) è continua ma non derivabile in $x=2$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 5 Per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\alpha x^2)}{5\log(1+x^4)}=+\infty$

A) per ogni $\alpha>0$ B) per ogni α

C) per ogni $\alpha\neq\frac{5}{3}$ D) solo se $\alpha=\frac{5}{3}$

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 6 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\cos(x^2)\,dx =$

A) $\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$ B) $\frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) 1

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 7 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n-1}} =$

A) $-\infty$ B) 0

C) $+\infty$ D) $\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 8 Sia $A = \left\{\cos\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\right\}$. Allora

A) $\min(A) = \cos 1$ B) A non ha minimo

C) $\min(A) = 0$ D) $\max(A) = 1$

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 9 $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)\sqrt{x^2-9}}$

A) diverge positivamente B) converge

C) diverge negativamente D) non esiste

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 10 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{4x^2 + e^x}{x^3}$

A) ha minimo B) non ha minimo ma è inferiormente limitata

C) ha massimo D) non è inferiormente limitata

$\boxed{\text{A}}$

codice II anno

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 23 giugno 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = (3-x)e^{2x}$ determinandone punti di massimo e di minimo locali, massimo e minimo assoluti o estremi superiore e inferiore, asintoti e convessità.

Soluzione

La funzione è definita e drivabile in tutto $\mathbb{R}$ pertanto non presenta asintoti verticali. Vediamo i limiti all'infinito. Applicando il teorema di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-2e^{-2x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

Quindi la funzione ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$. Inoltre si ottiene subito anche che la funzione non è inferiormente limitata, quindi

$$\inf(f) = -\infty.$$

Vediamo se c'è anche l'asintoto obliquo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-x}{x} e^{2x} = -1 \cdot (+\infty) = -\infty$$

pertanto non esiste l'asintoto obliquo. Cerchiamo ora eventuali punti di massimo o minimo locali.

$$f'(x) = -e^{2x} + (3-x)2e^{2x} = e^{2x}(5-2x).$$

Dato che l'esponenziale è una funzione sempre positiva si ottiene subito che

$$f'(x) > 0 \iff 5 - 2x > 0 \iff x < \frac{5}{2}.$$

La funzione è quindi crescente sulla semiretta $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ e decrescente sulla semiretta $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = \frac{5}{2}$ è punto di massimo locale e assoluto. Il massimo della funzione è quindi $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{e^5}{2}$. Per determinare gli intervalli di convessità calcoliamo la derivata seconda (la funzione è derivabile infinite volte).

$$f''(x) = 2e^{2x}(5-2x) + e^{2x}(-2) = e^{2x}(-4x+8) = 4e^{2x}(2-x)$$

quindi

$$f''(x) > 0 \iff 2 - x > 0 \iff x < 2$$

pertanto la funzione è convessa sulla semiretta $(-\infty, 2]$ e concava sulla semiretta $[2, +\infty)$.

Esercizio 2 Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}\log(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}\,dx$$

Soluzione

Eseguiamo la sostituzione $e^{2x}+1=t$. Risulta

$$\frac{dt}{dx}=2e^{2x}, \qquad x=0 \implies t=2, \qquad x=1 \implies t=e^2+1$$

Quindi l'integrale cercato diventa

$$\frac{1}{2}\int_2^{e^2+1} \frac{\log t}{t^2}\,dt.$$

Lasciamo per ora da parte il fattore moltiplicativo $\frac{1}{2}$ e integriamo per parti, derivando $\log t$ e integrando $\frac{1}{t^2}$, ottenendo

$$\int_2^{e^2+1} \frac{\log t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\,\log t\right]_2^{e^2+1} - \int_2^{e^2+1} -\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = -\frac{\log(e^2+1)}{e^2+1}+\frac{\log 2}{2}+\left[-\frac{1}{t}\right]_2^{e^2+1}$$
$$= -\frac{\log(e^2+1)}{e^2+1}+\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{e^2+1}+\frac{1}{2}=\frac{\log 2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\log(e^2+1)+1}{e^2+1}$$

L'integrale cercato si ottiene moltiplicando per $\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}\log(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}\,dx = \frac{\log 2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{\log(e^2+1)+1}{2(e^2+1)}.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{|2-\alpha|^{n+2}}{n^3e^n}$ al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$.

Soluzione

La serie è a termini non negativi, quindi possiamo applicare il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|2-\alpha|^{n+2}}{n^3e^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|2-\alpha|^{\frac{n+2}{n}}}{\sqrt[n]{n^3}\,e}=\frac{|2-\alpha|}{e}$$

Dal criterio della radice otteniamo che se $\frac{|2-\alpha|}{e}<1$, la serie converge. Questo accade se $|2-\alpha|<e$ cioè

$$2-e<\alpha<2+e.$$

Se invece $\alpha < 2 - e$ oppure $\alpha > 2 + e$, otteniamo che la serie diverge positivamente. Nei casi limite, quando $\alpha = 2 - e$ oppure $\alpha = 2 + e$, sostituendo, la serie ottenuta è

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^2}{n^3}$$

che è convergente. La serie converge quindi per $\alpha \in [2 - e, 2 + e]$.