Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 4 giugno 2012

Domanda 1 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} < x\}$. L'estremo superiore dell'insieme A è

A) 1 B) $+\infty$

C) e D) 0

B

Domanda 2 Sia $A = \left\{n \in \mathbb{Z} : \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -1\right\}$. L'insieme A

A) è limitato B) è limitato superiormente ma non inferiormente

C) è limitato inferiormente ma non superiormente

D) non è limitato né superiormente né inferiormente

D

Domanda 3

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n - \frac{5}{n} + \sin\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right)$$

A) non esiste B) vale $\frac{3}{2}$

C) vale 0 D) vale $\frac{5}{3}$

B

Domanda 4 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 4} \frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{n}}}{n}$

A) diverge positivamente B) converge assolutamente

C) diverge negativamente D) converge semplicemente ma non assolutamente

B

Domanda 5

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2\log(1+x)\sin(x-2)}{(e^{x-2}-1)x} =$$

A) 0 B) $+\infty$

C) $2\log 3$ D) 4

C

Domanda 6 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2 + \sqrt{x}}$

A) è inferiormente ma non superiormente limitata B) è limitata

C) è superiormente ma non inferiormente limitata

D) non è né superiormente né inferiormente limitata

C

Domanda 7 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^n(-1)^n}{n!\,n}$

A) converge assolutamente B) converge semplicemente ma non assolutamente

C) diverge positivamente D) diverge negativamente

A

Domanda 8 Sia $F(x) = \displaystyle\int_4^{x/4} \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$. Allora $F'(4) =$

A) 0 B) $\dfrac{e}{4(e^2+1)}$

C) $\dfrac{e^4}{e^8+1}$ D) $\dfrac{e^4(1-e^8)}{(e^8+1)^2}$

B

Domanda 9

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^3}\, dt$$

A) converge B) diverge negativamente

C) diverge positivamente D) non esiste

B

Domanda 10

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+2)}\, dx =$$

A) $\dfrac{7}{5}$ B) $\dfrac{5}{2}\log 2 - \dfrac{3}{2}\log 3$

C) $3\log 2$ D) $\log 5 - \log 2$

B

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 4 giugno 2012

Domanda 1

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2\log(1+x)\sin(x-2)}{(e^{x-2}-1)x}=$$

$\boxed{\text{B}}$

A) 0 B) $2\log 3$ C) $+\infty$ D) 4

Domanda 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+n^2-1}-\sqrt{n^3+2n^2-n}}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}}=$$

A) 0 B) $\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{C}}$

C) $+\infty$ D) $-\infty$

Domanda 3

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{5}{n}+\sin\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right)$$

A) vale $\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{A}}$

B) non esiste C) vale 0 D) vale $\frac{5}{3}$

Domanda 4

$$\int_1^2\frac{x-1}{x(x+2)}\,dx=$$

A) $\log 5-\log 2$

$\boxed{\text{D}}$

B) $3\log 2$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{5}{2}\log 2-\frac{3}{2}\log 3$

Domanda 5 Sia $F(x)=\int_4^{x/4}\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$. Allora $F'(4)=$

A) 0 B) $\frac{e}{4(e^2+1)}$

$\boxed{\text{B}}$

C) $\frac{e^4(1-e^8)}{(e^8+1)^2}$ D) $\frac{e^4}{e^8+1}$

Domanda 6 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} < x\}$. L'estremo superiore dell'insieme A è

A) 0   B) $+\infty$

C) 1   D) e

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 7 Sia $A = \left\{n \in \mathbb{Z} : \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -1\right\}$. L'insieme A

A) è limitato superiormente ma non inferiormente

B) è limitato   C) non è limitato né superiormente né inferiormente

D) è limitato inferiormente ma non superiormente

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 8 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2 + \sqrt{x}}$

A) non è né superiormente né inferiormente limitata   B) è limitata

C) è inferiormente ma non superiormente limitata

D) è superiormente ma non inferiormente limitata

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 9

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 4)\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{(x^2 + 2)\sin(x - 2)} =$$

A) 0   B) $+\infty$ C) $\dfrac{2}{3}$

D) non esiste

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 10

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^3}\, dt$$

A) diverge positivamente   B) converge   C) non esiste

D) diverge negativamente

$\boxed{\text{D}}$

II anno

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 4 giugno 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{|x^2-4|}$ determinandone insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità, punti di massimo e di minimo locali, massimo e minimo assoluti o estremi superiore e inferiore, asintoti e convessità.

Soluzione

La funzione è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, in quanto composizione di funzioni continue. La funzione, per lo stesso motivo, è anche derivabile in tutto $\mathbb{R}$, tranne al più i punti dove si annulla il valore assoluto, dove dovremo esaminarla. Osserviamo anche che la funzione è pari, quindi effettueremo i calcoli solo per $x \geq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{|x^2-4|} = +\infty$$

quindi la funzione non ha massimo e l'estremo superiore è $+\infty$. Osserviamo anche che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione è inferiormente limitata. Inoltre $f(2) = f(-2) = 0$, quindi 0 è il minimo della funzione. I punti $x = 2$, $x = -2$ sono punti di minimo locale e assoluto. Dividiamo ora il dominio di f in due parti, secondo il segno del valore assoluto.

$$x^2 - 4 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} & \text{se } x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \\ \sqrt{4-x^2} & \text{se } x \in [-2,2] \end{cases}$$

L'unico asintoto possibile è quello obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} - x = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} - x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{2}\frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0.$$

L'asintoto obliquo a $+\infty$ esiste ed ha equazione $y = x$. Per simmetria, esiste anche l'asintoto obliquo a $-\infty$ ed ha equazione $y = -x$. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} & \text{se } x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \\ \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se } x \in [-2,2] \end{cases}$$

Dato che la funzione è continua nel punto $x = 2$ si ottiene che

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$$

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty.$$

Nel punto $x = 2$ la funzione non è derivabile (è un punto di cuspide). Analogo risultato per il punto $x = -2$. Per quanto riguarda la monotonia si ha che

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-2,0) \cup (2,+\infty) \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x \in (-\infty,-2) \cup (0,2) \end{cases}$$

Il punto $x = 0$ è quindi di massimo locale. Valutiamo ora la derivata seconda che esiste in tutti i punti tranne $x = \pm 2$. Se $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ si ha che

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-4}{(x^2-4)^{3/2}}.$$

Analogamente, se $x \in (-2,2)$

$$f''(x) = \frac{-4}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

Ne segue che f è concava in ciascuno degli intervalli $(-\infty,-2]$, $[-2,2]$, $[2,+\infty)$. Ricordiamo anche che questo non implica la concavità sull'unione di tali intervalli.

Esercizio 2 Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^\alpha)}{\sqrt[3]{x} + \sin x}\, dx.$$

Soluzione

Osserviamo che il denominatore della funzione, nell'intervallo di integrazione, si annulla solo per $x = 0$ e per il resto è sempre positivo. Infatti, se $0 < x \leq 1$ si ha che $\sin x > 0$ e anche $\sqrt[3]{x} > 0$, mentre se $x > 1$ allora $\sin x > -1$ e $\sqrt[3]{x} > 1$. Anche il numeratore è sempre positivo, utilizzeremo pertanto i criteri del confronto e del confronto asintotico. Esaminiamo l'integrabilità in $x = 0$. La funzione arcotangente è limitata, quindi, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \frac{\arctan(x^\alpha)}{\sqrt[3]{x} + \sin x} < \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{x} + \sin x}.$$

Inoltre $\sin x \sim x$ quindi

$$\sqrt[3]{x} + \sin x = x^{1/3}\left(1 + \frac{\sin x}{x^{1/3}}\right) \sim x^{1/3}.$$

Ne segue che

$$0 \leq \frac{\arctan(x^\alpha)}{\sqrt[3]{x} + \sin x} < \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{x} + \sin x} \sim \frac{1}{x^{1/3}}$$

il cui integrale converge perché $\frac{1}{3} < 1$.

Nel punto $x = 0$ l'integrale converge quindi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esaminiamo ora la convergenza all'infinito. Se $\alpha > 0$ si ha che $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x^\alpha) = \frac{\pi}{2}$. Dato che $\sin x$ è limitata, si ha poi che $\sqrt[3]{x} + \sin x \sim \sqrt[3]{x}$. Allora

$$\frac{\arctan(x^\alpha)}{\sqrt[3]{x} + \sin x} \sim \frac{1}{x^{1/3}}$$

il cui integrale diverge.

Se $\alpha = 0$ si ha che $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x^\alpha) = \frac{\pi}{4}$ e, di nuovo

$$\frac{\arctan(x^\alpha)}{\sqrt[3]{x} + \sin x} \sim \frac{1}{x^{1/3}}$$

con integrale divergente.

Se invece $\alpha < 0$ allora $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x^\alpha) = 0$ e $\arctan(x^\alpha) \sim x^\alpha$. Quindi

$$\frac{\arctan(x^\alpha)}{\sqrt[3]{x} + \sin x} \sim \frac{x^\alpha}{x^{1/3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3} - \alpha}}$$

il cui integrale converge se $\frac{1}{3} - \alpha > 1$ cioè $\alpha < -\frac{2}{3}$. Quindi, per $x \to +\infty$ l'integrale converge se $\alpha < -\frac{2}{3}$.

Il risultato finale è che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^\alpha)}{\sqrt[3]{x} + \sin x}\, dx$ converge se $\alpha < -\frac{2}{3}$ mentre diverge positivamente se $\alpha \geq -\frac{2}{3}$.

Esercizio 3 (Solo per gli studenti del I anno) Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{5^n\, n^5}{((\log n)^{\alpha - 5})^n}$$

Soluzione

La serie è a termini positivi, dato che $\log n > 0$ per $n \geq 2$. Utilizziamo il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{\frac{5^n\, n^5}{((\log n)^{\alpha - 5})^n}} = \frac{5}{(\log n)^{\alpha - 5}} \sqrt[n]{n^5}.$$

Dato che

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^5} = 1$$

si ha che la convergenza dipenderà dall'altro fattore del prodotto. Osserviamo ora che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{(\log n)^{\alpha-5}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 5 \\ 5 & \text{se } \alpha = 5 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 5 \end{cases}$$

Quindi, per il criterio della radice, la serie converge se $\alpha > 5$ mentre diverge positivamente se $\alpha \leq 5$.

Esercizio 4 (Solo per gli studenti del II anno) Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{(2+\cos n)^n + n^3}{(n-1)! - 4^n}$$

Soluzione
Osserviamo preliminarmente che, dal criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{(n-1)!} = 0$$

quindi il denominatore di a_n è definitivamente positivo. Essendo anche il numeratore positivo (dato che $\cos n \geq -1$), risulta che $a_n > 0$ definitivamente.

Dal fatto che $\cos n \leq 1$ si ha che

$$(2+\cos n)^n + n^3 \leq 3^n + n^3.$$

Quindi, definitivamente

$$0 < a_n \leq \frac{3^n + n^3}{(n-1)! - 4^n} = \frac{3^n}{(n-1)!} \frac{1 + \dfrac{n^3}{3^n}}{1 - \dfrac{4^n}{(n-1)!}}$$

e, sempre dal criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0.$$

Quindi

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{(n-1)!} \frac{1+0}{1-0} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{(n-1)!} = 0$$

ancora dal criterio del rapporto. Dal teorema dei Carabinieri segue che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$