Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 11 febbraio 2012

Domanda 1 La derivata della funzione $f(x) = (\log x)^{\sin x}$ è

A) $\dfrac{1}{x}(\log x)^{\sin x - 1}$ B) $\dfrac{1}{x}(\log x)^{\cos x}$

C) $(\log x)^{\sin x}\left(\cos x\, \log(\log x) + \dfrac{\sin x}{x \log x}\right)$ D) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x} + (\log x)^{\cos x}$

C

Domanda 2 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2(1+x^2)}\right)$

A) ha un asintoto obliquo B) ha minimo assoluto

C) ha un asintoto orizzontale e uno verticale D) non è limitata inferiormente

C

Domanda 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x - x^2}{(\log(1+x))^3} =$$

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{1}{3}$

C) 0 D) $+\infty$

B

Domanda 4 La successione $a_n = 1 + (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

A) ha sia massimo che minimo B) ha massimo ma non ha minimo

C) non ha né massimo né minimo D) ha minimo ma non ha massimo

C

Domanda 5 Sia $A = \{e^{-n} + n : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$. Allora

A) $\sup(A) = +\infty$ B) $\sup(A) = \dfrac{1}{e}$

C) $\inf(A) = -\infty$ D) $\inf(A) = 0$

A

Domanda 6

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\log(1+\sqrt{x})(1-\cos x)}\,dx$$

A) diverge positivamente   B) converge

C) diverge negativamente   D) non esiste

B

Domanda 7

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

A) diverge negativamente   B) non esiste

C) converge   D) diverge positivamente

C

Domanda 8

$$\int_e^{e^2} \frac{1+\log x}{x\log x}\,dx =$$

A) 1   B) $+\infty$

C) $1+\log 2$ D) $\dfrac{e}{2}$

C

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n+1}{2+\cos\left(\frac{n}{3}\right)}$

A) non converge   B) converge ma non converge assolutamente

C) converge assolutamente   D) diverge negativamente

A

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_n \frac{\cos((n+2)\pi)e^{-5n}(\log n)^7}{2\sqrt{n}}$

A) diverge positivamente   B) converge ma non converge assolutamente

C) converge assolutamente   D) diverge negativamente

C

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 11 febbraio 2012

Domanda 1 La successione $a_n = 1 + (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

A) non ha né massimo né minimo B) ha minimo ma non ha massimo
C) ha massimo ma non ha minimo

D) ha sia massimo che minimo

A

Domanda 2

$$\int_e^{e^2} \frac{1 + \log x}{x \log x}\, dx =$$

A) $+\infty$

B) $\frac{e}{2}$ C) $1 + \log 2$ D) 1

C

Domanda 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x - x^2}{(\log(1+x))^3} =$$

A) 0 B) $+\infty$

C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$

D

Domanda 4 La derivata della funzione $f(x) = (\log x)^{\sin x}$ è

A) $(\log x)^{\sin x}\left(\cos x\, \log(\log x) + \frac{\sin x}{x \log x}\right)$ B) $\frac{1}{x}(\log x)^{\sin x - 1}$ C) $\frac{1}{x}(\log x)^{\cos x}$

D) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} + (\log x)^{\cos x}$

A

Domanda 5

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\log(1+\sqrt{x})(1 - \cos x)}\, dx$$

A) non esiste

B) diverge positivamente C) diverge negativamente D) converge

D

Domanda 6 Sia $A = \{e^{-n} + n : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$. Allora

A) $\sup(A) = \dfrac{1}{e}$

$\boxed{\text{D}}$

B) $\inf(A) = 0$ C) $\inf(A) = -\infty$ D) $\sup(A) = +\infty$

Domanda 7

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x + \sqrt{x}}\, dx$$

A) diverge positivamente

$\boxed{\text{B}}$

B) converge C) diverge negativamente D) non esiste

Domanda 8 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2(1+x^2)}\right)$

A) ha un asintoto obliquo B) non è limitata inferiormente

$\boxed{\text{C}}$

C) ha un asintoto orizzontale e uno verticale D) ha minimo assoluto

Domanda 9 La successione $a_n = \dfrac{n + e^n}{2 - \cos n}$

A) diverge positivamente B) ha limite finito C) non ha limite e non è limitata

$\boxed{\text{A}}$

D) non ha limite ma è limitata

Domanda 10

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{\sin\frac{2}{n^2}} =$$

A) $-\dfrac{3}{2}$ B) $+\infty$ C) $-\infty$

$\boxed{\text{C}}$

D) 0

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 11 febbraio 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x-3)^2}$$

determinandone insieme di definizione, asintoti, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo o di minimo locali e intervalli di convessità.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \neq 3$. Osserviamo subito che la funzione assume solo valori strettamente positivi. Valutiamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Inoltre abbiamo un asintoto verticale di equazione $x = 3$. Vediamo ora gli intervalli di monotonia calcolando la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - (x^2+1)2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{-2(3x+1)}{(x-3)^3}.$$

Il numeratore cambia segno per $x = -\frac{1}{3}$ e il denominatore per $x = 3$. Ne segue che

$$f'(x) > 0 \qquad \forall x \in \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$$

$$f'(x) < 0 \qquad \forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty).$$

La funzione è quindi decrescente nella semiretta $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, crescente nell'intervallo $[-\frac{1}{3}, 3)$ e di nuovo decrescente nella semiretta $(3, +\infty)$. Il punto $x = -\frac{1}{3}$ è quindi di minimo locale. Non vi sono altri punti di massimo o minimo locali, in quanto la funzione è derivabile in tutto il suo insieme di definizione e la derivata prima non si annulla in altri punti. Dato che la funzione è decrescente in $(3, +\infty)$ e che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, si ottiene subito che $f(x) \geq 1$ per ogni $x > 3$. Valutando f nel punto di minimo locale si ottiene che

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{10} < 1$$

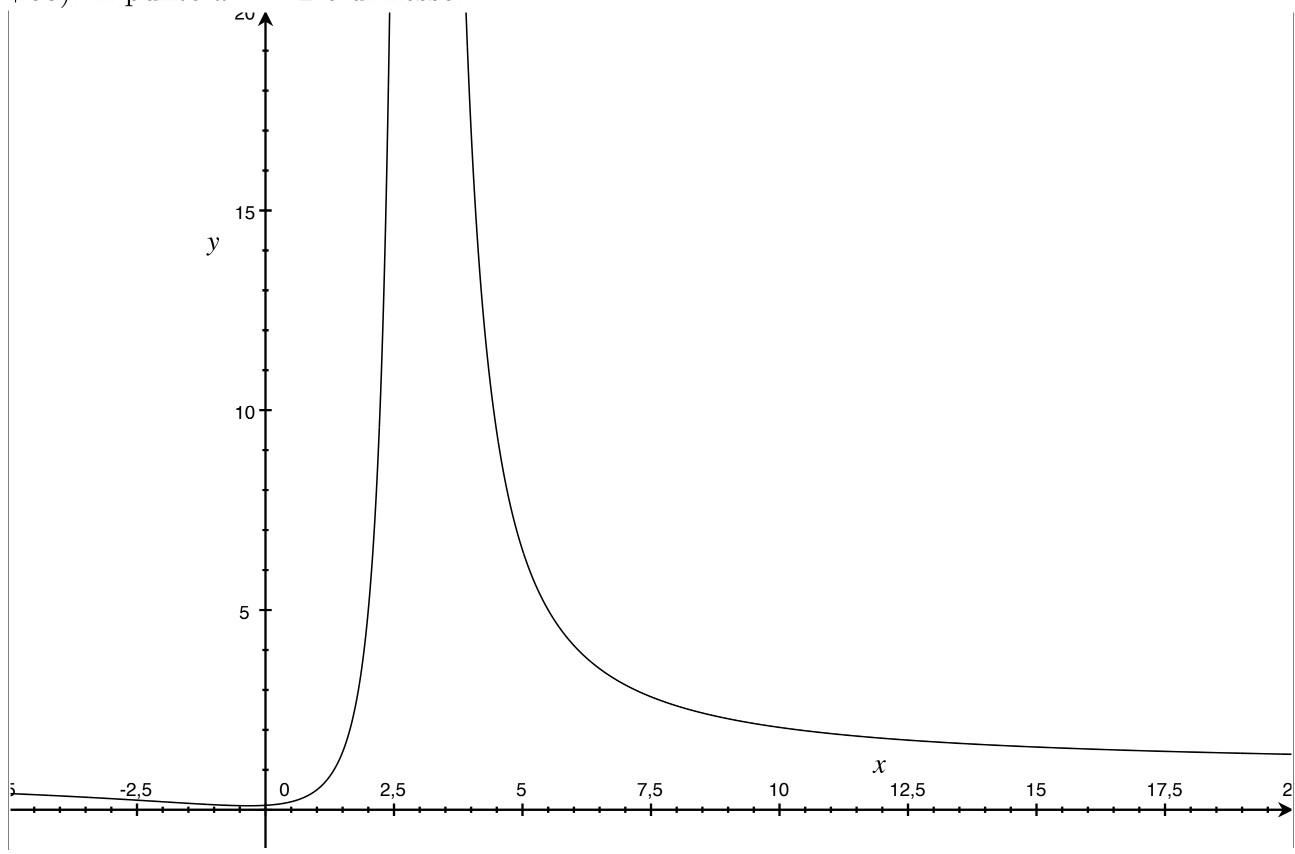
quindi il punto è di minimo assoluto. L'estremo superiore di f è $+\infty$ e il minimo è $\frac{1}{10}$.
Per valutare la convessità calcoliamo la derivata seconda.

$$f''(x) = -2\frac{3(x-3)^3 - (3x+1)3(x-3)^2}{(x-3)^6} = 12\frac{x+2}{(x-3)^4}.$$

Risulta quindi che

$$f''(x) > 0 \quad \forall x > -2, \qquad f''(x) < 0 \quad \forall x < -2.$$

Ne segue che f è concava nella semiretta $(-\infty, -2]$, convessa sull'intervallo $[-2, 3)$ e sulla semiretta $(3, +\infty)$. Il punto $x = -2$ è di flesso.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 \frac{e^x \log(1 + 2e^x + e^{2x})}{1 + e^x}\, dx.$$

Soluzione

Eseguendo la sostituzione $t = 1 + e^x$, con $\frac{dt}{dx} = e^x$ e osservando che $1 + 2e^x + e^{2x} = (1 + e^x)^2$, si ottiene

$$\int_0^3 \frac{e^x \log(1 + 2e^x + e^{2x})}{1 + e^x}\, dx = \int_2^{1+e^3} \frac{\log(t^2)}{t}\, dt = \int_2^{1+e^3} \frac{2\log t}{t}\, dt = \left[(\log t)^2\right]_2^{1+e^3} = (\log(1+e^3))^2 - (\log 2)^2.$$

Esercizio 3 (Solo I anno) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_n \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{n}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^{n/2}}{\log(n+1)}$$

dove il simbolo $\lfloor\ \rfloor$ indica la parte intera.

Soluzione

Indichiamo con a_n il termine generale della serie. Osserviamo che se n è pari allora possiamo scrivere $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ e risulta

$$\left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor - \frac{2k}{2} = k - k = 0$$

quindi $a_{2k} = 0$. La serie quindi è composta solo dai termini di indice dispari cioè con $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$. In questo caso abbiamo

$$\begin{aligned} a_{2k+1} = \left(\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor - \frac{2k+1}{2} \right)^{\frac{2k+1-1}{2}} \frac{2^{\frac{2k+1}{2}}}{\log(2k+1+1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{\log(2k+2)} &= \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{2^k\, 2^{1/2}}{\log(2k+2)} \\ &= \sqrt{2}\, \frac{(-1)^k}{\log(2k+2)}. \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo valutare la convergenza della serie

$$\sqrt{2} \sum_k \frac{(-1)^k}{\log(2k+2)}$$

che è una serie a segni alternati, essendo $\frac{1}{\log(2k+2)} > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Inoltre la successione $b_k = \frac{1}{\log(2k+2)}$ è decrescente, dato che il logaritmo è una funzione crescente, e infine $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. Per il criterio di Leibniz la serie quindi converge. Valutiamo ora la convergenza assoluta.

$$\sqrt{2} \sum_k \left| \frac{(-1)^k}{\log(2k+2)} \right| = \sqrt{2} \sum_k \frac{1}{\log(2k+2)}$$

e dalla disuguaglianza

$$\frac{1}{\log(2k+2)} \geq \frac{1}{2k+2} \sim \frac{1}{k}$$

applicando il criterio del confronto e del confronto asintotico otteniamo che la serie diverge. La serie data quindi è convergente ma non assolutamente convergente.

Esercizio 4 (Solo II anno) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Dato che la successione è a termini positivi possiamo applicare il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{(n+1)^{2n}\,(n+1)^2}{n^{2n}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} (n+1)^2$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to \frac{e^2}{4} > 1.$$

Quindi il limite cercato vale $+\infty$.