Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 28 gennaio 2012

Domanda 1 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x + 3}{x - \log x}$ è

A) limitata superiormente ma non inferiormente B) limitata inferiormente ma non superiormente

C) limitata D) non limitata né superiormente né inferiormente

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 2 Data la funzione $f(x) = \cos(\sqrt{\tan x})$ la sua derivata risulta

A) $-\sin(\sqrt{\tan x})$ B) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{\tan x}}$

C) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{\tan x}(\cos x)^2}$ D) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{x}(\cos x)^2}$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^2 + 1)e^{x+3}$

A) ha sia massimo che minimo B) ha massimo ma non ha minimo

C) non ha né massimo né minimo D) ha minimo ma non ha massimo

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 4

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n + n^3}{3^n + n^2} =$$

A) $e^{1/3}$ B) $+\infty$

C) $\log \dfrac{2}{3}$ D) 0

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 5 La successione $a_n = \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}$

A) ha minimo B) è limitata

C) non ha né massimo né minimo D) ha massimo

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 6 Sia $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita fa $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\, dt$. Risulta che

A) F è debolmente crescente B) F è debolmente decrescente

C) F ha un asintoto verticale D) F è limitata

D

Domanda 7 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^{2x+1} \frac{t^2+t}{\log(2+t^2)}\, dt$

A) non ha né massimi né minimi locali

B) ha un punto di massimo locale per $x = -1$ e uno di minimo locale per $x = -\frac{1}{2}$

C) ha un punto di massimo locale per $x = -1$ e uno di minimo locale per $x = 0$

D) ha un punto di minimo locale per $x = -\frac{1}{2}$ e nessun punto di massimo locale

B

Domanda 8

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$

A) π B) $2\sqrt{2}$

C) 0 D) 2

A

Domanda 9 La serie $\sum_{n\geq 2} \frac{(\log n)^4 \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{e^n(n-1)}$

A) converge assolutamente B) converge semplicemente ma non assolutamente

C) diverge positivamente D) è indeterminata

A

Domanda 10 La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(\log\frac{1}{3})^n}{n(\log 3)^{n-1}}$

A) converge assolutamente B) diverge positivamente

C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge negativamente

B

codice 269258

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 28 gennaio 2012

Domanda 1 Data la funzione $f(x) = \cos(\sqrt{\tan x})$ la sua derivata risulta

A) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{\tan x}}$

B) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{x}(\cos x)^2}$ C) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{\tan x}(\cos x)^2}$ D) $-\sin(\sqrt{\tan x})$

C

Domanda 2

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$

A) π B) 2

C) 0 D) $2\sqrt{2}$

A

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^2+1)e^{x+3}$

A) ha massimo ma non ha minimo

B) ha sia massimo che minimo C) non ha né massimo né minimo

D) ha minimo ma non ha massimo

C

Domanda 4 Sia $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita fa $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\,dt$. Risulta che

A) F è debolmente decrescente

B) F ha un asintoto verticale C) F è debolmente crescente D) F è limitata

D

Domanda 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3\left(1-\cos\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)} =$$

A) $+\infty$ B) non esiste

C) 0 D) 1

C

Domanda 6

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + n^3}{3^n + n^2} =$$

A

A) 0 B) $\log \frac{2}{3}$ C) $e^{1/3}$ D) $+\infty$

Domanda 7 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^{2x+1} \frac{t^2 + t}{\log(2+t^2)}\, dt$

A) ha un punto di massimo locale per $x = -1$ e uno di minimo locale per $x = 0$
B) non ha né massimi né minimi locali
C) ha un punto di massimo locale per $x = -1$ e uno di minimo locale per $x = -\frac{1}{2}$

C

D) ha un punto di minimo locale per $x = -\frac{1}{2}$ e nessun punto di massimo locale

Domanda 8 La successione $a_n = \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}$

C

A) non ha né massimo né minimo B) ha minimo C) ha massimo D) è limitata

Domanda 9 Il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$ è

A) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ B) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

C

C) $1 - x + x^2 - x^3$ D) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

Domanda 10 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{\sin x + 3}{x - \log x}$ è

A) limitata superiormente ma non inferiormente B) limitata
C) limitata inferiormente ma non superiormente

B

D) non limitata né superiormente né inferiormente

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 28 gennaio 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Trovare i punti di massimo e di minimo locali e assoluti e gli intervalli di convessità della funzione

$$f(x) = |x^3 - 3x^2 + 3x|$$

nell'intervallo $[-2, 3]$.

Soluzione

Osserviamo che

$$x^3 - 3x^2 + 3x = x(x^2 - 3x + 3)$$

e che il polinomio $x^2 - 3x + 3$ non ha radici reali, quindi è sempre positivo. Ne segue che la quantità all'interno del valore assoluto cambia segno solo per $x = 0$. Allora

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x & \text{se } x \geq 0 \\ -x^3 + 3x^2 - 3x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Osserviamo anche che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-2, 3]$ e $f(0) = 0$ quindi 0 è il minimo assoluto di f e $x = 0$ è punto di minimo locale e assoluto per la funzione.
f è continua in tutto il suo dominio ed è derivabile almeno per ogni $x \neq 0$. Vediamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 3 & \text{se } x > 0 \\ -3x^2 + 6x - 3 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Facendo i limiti da destra e da sinistra della derivata (ricordando che f è continua in 0) otteniamo

$$f'_-(0) = -3, \qquad f'_+(0) = 3$$

quindi f non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso. Vediamo ora gli intervalli di monotonia.

$$3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 \geq 0$$

$$-3x^2 + 6x - 3 = -3(x - 1)^2 \leq 0$$

quindi la funzione è decrescente nell'intervallo $[-2, 0]$ e crescente nell'intervallo $[0, 3]$. Ne segue che i punti $x = -2$ e $x = 3$ sono di massimo locale e non ve ne sono altri. Per determinare il massimo assoluto basta confrontare il valore di f in questi due punti.

$$f(-2) = 26, \qquad f(3) = 9.$$

Il massimo assoluto è quindi 26 e l'unico punto di massimo assoluto è $x = -2$. Vediamo infine la convessità calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & \text{se } x > 0 \\ -6x + 6 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dallo studio del segno otteniamo subito che $f''(x) > 0$ negli intervalli $[-2, 0)$ e $(1, 3)$, $f''(x) < 0$ in $(0, 1)$ e $f''(1) = 0$. Ne segue che f è convessa in $[-2, 0]$ e in $[1, 3]$ mentre è concava in $[0, 1]$. Il punto $x = 1$ è un punto di flesso.

Esercizio 2 Trovare i punti di massimo e di minimo locali, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo assoluti) della funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^{2x+1} \frac{t^2 - t}{e^{3+\sin t}}\, dt.$$

Soluzione

La funzione integranda è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$ quindi la F è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo i limiti.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - t}{e^{3+\sin t}} = +\infty$$

dato che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2 - t}{e^{3+\sin t}} \geq \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2 - t}{e^4} = +\infty.$$

Per analoghi motivi abbiamo anche

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \int_0^{-\infty} \frac{t^2 - t}{e^{3+\sin t}} = -\int_{-\infty}^{0} \frac{t^2 - t}{e^{3+\sin t}} = -\infty.$$

La derivata della funzione è

$$F'(x) = 2\frac{(2x+1)^2 - (2x+1)}{e^{3+\sin(2x+1)}} = \frac{4x(2x+1)}{e^{3+\sin(2x+1)}}.$$

Il denominatore è sempre positivo quindi il segno è determinato solo da quello del numeratore. Risulta allora che

$$F'(x) > 0 \text{ se } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$$

$$F'(x) < 0 \text{ se } x \in (-\frac{1}{2}, 0).$$

La funzione è quindi crescente in ciascuno degli intervalli $(-\infty, -\frac{1}{2})$ e $(0, +\infty)$ mentre è decrescente in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Il punto $x = -\frac{1}{2}$ è di massimo locale e il punto $x = 0$ è di minimo locale. L'estremo superiore è $+\infty$ e quello inferiore è $-\infty$. Non esistono massimo e minimo assoluti.

Esercizio 3 (Solo I anno) Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie

$$\sum_n \left(1 - \cos\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2}\right)\right)(n+1)^3.$$

Soluzione

La serie è a termini non negativi, dato che il coseno è sempre minore o uguale di 1. Se $\alpha \neq 0$ risulta che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2} = 0$$

quindi possiamo utilizzare lo sviluppo di Taylor del coseno $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$ con $t = \left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2}$ ottenendo che

$$1 - \cos\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2}\right) = \frac{1}{2(n+2)^{2\alpha^2}} + o\left(\frac{1}{(n+2)^{3\alpha^2}}\right).$$

Quindi

$$\left(1 - \cos\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha^2}\right)\right)(n+1)^3 \sim \frac{(n+1)^3}{(n+2)^{2\alpha^2}} \sim \frac{1}{n^{2\alpha^2-3}}.$$

Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico ottenendo che la serie converge se $2\alpha^2 - 3 > 1$ e diverge se $2\alpha^2 - 3 \leq 1$, quindi

$$\text{se } \alpha > \sqrt{2} \text{ oppure } \alpha < -\sqrt{2} \text{ la serie converge}$$

$$\text{se } -\sqrt{2} \leq \alpha \leq \sqrt{2},\ x \neq 0 \text{ la serie diverge positivamente.}$$

Resta solo il caso $\alpha = 0$ per il quale il termine generale della serie diventa

$$(1 - \cos 1)(n+1)^3$$

che tende a $+\infty$ quindi, manca la condizione necessaria per la convergenza e la serie, che è a termini positivi, diverge a $+\infty$.

Esercizio 4 (Solo II anno) Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n\alpha}((\cos n)^4 + 1)}{n(e^{2n} - 1)}.$$

Soluzione

Osserviamo che

$$\frac{e^{n\alpha}((\cos n)^4 + 1)}{n(e^{2n} - 1)} = \frac{e^{n\alpha}}{e^{2n}} \frac{((\cos n)^4 + 1)}{n(1 - e^{-2n})}.$$

La successione è non negativa, quindi possiamo applicare il criterio della radice n-esima.

$$\sqrt[n]{\frac{e^{n\alpha}}{e^{2n}}\frac{((\cos n)^4+1)}{n(1-e^{-2n})}} = \frac{e^{\alpha}}{e^2}\sqrt[n]{\frac{(\cos n)^4+1}{n(1-e^{-2n})}}$$

Per n abbastanza grande risulta che

$$\frac{1}{n} \leq \frac{(\cos n)^4+1}{n(1-e^{-2n})} \leq \frac{2}{\frac{n}{2}} = \frac{4}{n}$$

quindi, per il teorema dei Carabinieri

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\cos n)^4+1}{n(1-e^{-2n})}} = 1.$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n\alpha}((\cos n)^4+1)}{n(e^{2n}-1)}} = \frac{e^{\alpha}}{e^2}$$

e, dal criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\alpha}((\cos n)^4+1)}{n(e^{2n}-1)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2. \end{cases}$$

Nel caso $\alpha = 2$ la successione diventa

$$\frac{((\cos n)^4+1)}{n(1-e^{-2n})}$$

che tende a 0 dato che il numeratore è limitato e il denominatore tende a $+\infty$.