Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 9 gennaio 2012

Domanda 1 La funzione $f(x) = \sqrt{\arctan\left(\sqrt{x^4+1}\right)}$

A) ha infiniti asintoti verticali B) ha minimo

B

C) ha massimo D) non è limitata superiormente

Domanda 2 La serie $\sum_n (-1)^n \left(\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right) n^{8/3}$

A) converge semplicemente ma non assolutamente B) diverge positivamente

C

C) converge assolutamente D) diverge negativamente

Domanda 3 L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-2| > x-1\}$

A) non è limitato né superiormente né inferiormente B) è limitato

C) è limitato inferiormente ma non superiormente

A

D) è limitato superiormente ma non inferiormente

Domanda 4 Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1-e^{x^3}}{\sin^3 x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

A) è continua a destra ma non a sinistra B) è continua a sinistra ma non a destra

C

C) è continua D) non è continua né a destra né a sinistra

Domanda 5 L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}\,(1+3x^4)}\,dx$

A) diverge a $+\infty$ B) converge

B

C) non esiste D) diverge a $-\infty$

Domanda 6 La serie $\sum_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+5}$

A) converge assolutamente B) diverge positivamente

C) converge semplicemente ma non assolutamente D) è indeterminata

C

Domanda 7 La successione $a_n = \frac{1}{\log(n^3)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ definita per $n \geq 2$

A) converge B) ha minimo

C) è definitivamente debolmente decrescente D) non è limitata inferiormente

B

Domanda 8 $\int_1^2 \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}-1}\,dx =$

A) $\log\frac{3}{2}$ B) $\log(e^2-e)$

C) $\log\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right)$ D) 0

C

Domanda 9 La successione $a_n = \frac{n^2+\sin n - e^n}{(\log n)^2+n^n}$ definita per $n \geq 1$

A) è limitata B) è debolmente decrescente

C) è inferiormente ma non superiormente limitata

D) è superiormente ma non inferiormente limitata

A

Domanda 10 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x t(1-t^2)e^{\cos(t^2)}\,dt$

A) non ha né massimi né minimi locali B) ha due punti di massimo locale e uno di minimo locale

C) ha un solo punto di massimo locale e nessun minimo locale

D) ha un solo punto di minimo locale e un solo punto di massimo locale

B

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 9 gennaio 2012

Domanda 1 L'insieme $A = \left\{ \frac{1}{\log n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$

A) ha minimo B) non è superiormente limitato

C) è inferiormente limitato ma non ha minimo

C

D) è superiormente limitato ma non ha massimo

Domanda 2 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} (\cos x)^2 \, \tan x \, dx =$

A) $\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$

A

C) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}$

Domanda 3 $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^x(e^x - 1)}{e^{2x} - 1} \, dx =$

A) $\log \left(\frac{e^2 + 1}{e + 1} \right)$ B) $\log \frac{3}{2}$ C) $\log(e^2 - e)$

A

D) 0

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{1}{\log(n^3) \sin \left(\frac{1}{n} \right)}$ definita per $n \geq 2$

A) è definitivamente debolmente decrescente B) converge C) ha minimo

C

D) non è limitata inferiormente

Domanda 5 La successione $a_n = \dfrac{n^2 + \sin n - e^n}{(\log n)^2 + n^n}$ definita per $n \geq 1$

A) è superiormente ma non inferiormente limitata B) è limitata C) è debolmente decrescente

B

D) è inferiormente ma non superiormente limitata

Domanda 6 L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| > x - 1\}$
A) è limitato superiormente ma non inferiormente
B) non è limitato né superiormente né inferiormente C) è limitato

B

D) è limitato inferiormente ma non superiormente

Domanda 7 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x t(1-t^2)e^{\cos(t^2)}\,dt$
A) ha due punti di massimo locale e uno di minimo locale
B) ha un solo punto di massimo locale e nessun minimo locale
C) ha un solo punto di minimo locale e un solo punto di massimo locale

A

D) non ha né massimi né minimi locali

Domanda 8 La funzione $f(x) = \sqrt{\arctan\left(\sqrt{x^4+1}\right)}$
A) ha minimo

A

B) ha infiniti asintoti verticali C) ha massimo D) non è limitata superiormente

Domanda 9 L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}\,(1+3x^4)}\,dx$
A) converge

A

B) non esiste C) diverge a $-\infty$ D) diverge a $+\infty$

Domanda 10 Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1-e^{x^3}}{\sin^3 x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$
A) è continua B) è continua a destra ma non a sinistra
C) è continua a sinistra ma non a destra

A

D) non è continua né a destra né a sinistra

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

Analisi Matematica I

Pisa, 9 gennaio 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}\, dx$$

e per tali valori calcolare l'integrale.

Soluzione

La funzione integranda ha un denominatore che non si annulla mai, quindi è continua su tutta la semiretta $[0,+\infty)$. Per verificare l'integrabilit'a basta quindi controllare l'andamento a $+\infty$. Per x che tende a $+\infty$ l'integranda è positiva e asintotica a $\frac{1}{x^2\alpha-1}$ il cui integrale a $+\infty$ converge se e solo se $2\alpha - 1 > 1$ cioè se $\alpha > 1$. Posso applicare il criterio del confronto asintotico e concludere che anche l'integrale proposto converge per $\alpha > 1$. Fissiamo $M > 0$ e calcoliamo l'integrale definito

$$\int_0^{M} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}\, dx.$$

Eseguiamo la sostituzione $x^2 - 2x + 2 = t$, $(2x-2)dx = dt$ ottenendo che l'integrale precedente diventa

$$\frac{1}{2}\int_2^{M^2-2M+2} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_2^{M^2-2M+2} = \frac{1}{2(1-\alpha)}\left((M^2-2M+2)^{1-\alpha} - 2^{1-al}\right).$$

Per trovare il valore dell'integrale generalizzato dobbiamo fare il limite della quantità precedente per $M \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2(1-\alpha)}\left((M^2-2M+2)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{2^\alpha(\alpha-1)}.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log x + 2x}{e^{3x}}$e se ne determinino gli eventuali asintoti, i punti di massimo e minimo locali, il massimo e il minimo o estremi superiore e inferiore.

Soluzione

La funzione è derivabile, quindi anche continua, in tutto il suo dominio.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty + 0}{1} = -\infty$$

Applicando il teorema di de l'Hôpital si ottiene che

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}+2}{3e^{3x}} = \frac{2}{+\infty} = 0^+.$$

Studiamo ora la monotonia della funzione facendone la derivata.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)e^{3x} - (\log x + 2x)3e^{3x}}{e^{6x}} = \left(\frac{1}{x} + 2 - 3\log x - 6x\right)e^{-3x}.$$

Il segno di f' è determinato da quello della funzione

$$g(x) = \frac{1}{x} + 2 - 3\log x - 6x$$

che studieremo separatamente. Dai limiti

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$$

otteniamo che esiste almeno un punto dove g cambia segno (g è continua si puo applicare il teorema degli zeri). Valutiamo ora il numero di zeri di g calcolandone la derivata

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 6$$

che risulta negativa per ogni $x > 0$. Quindi la g è strettamente decrescente su tutta la semiretta $(0, +\infty)$ pertanto ha un solo zero. Esiste allora un numero $c \in (0, +\infty)$ tale che

$$g(x) > 0 \qquad \text{se } x \in (0, c), \qquad g(x) < 0 \qquad \text{se } x \in (c, +\infty).$$

Ne segue che f è crescente nell'intervallo $(0, c)$, decrescente in $(c, +\infty)$ quindi il punto $x = c$ è punto di massimo locale e assoluto. Il massimo di f vale $f(c)$. L'estremo inferiore di f è $-\infty$.

Esercizio 3 Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite della successione

$$a_n = \frac{1}{n^{1-\alpha^2}}.$$

Si determini inoltre, sempre al variare di α, la convergenza della serie

$$\sum_n \frac{1}{n^{1-\alpha^2}}.$$

Soluzione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha^2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-\alpha^2 > 0 \\ 1 & \text{se } 1-\alpha^2 = 0 \\ +\infty & \text{se } 1-\alpha^2 < 0 \end{cases}$$

Il primo caso si verifica se $-1 < \alpha < 1$, il secondo quando $\alpha = \pm 1$ e il terzo quando $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Per quanto riguarda la serie, è un'armonica generalizzata di esponente $1 - \alpha^2$ quindi converge se e solo se $1 - \alpha^2 > 1$ cioè se $\alpha^2 < 0$ che rappresenta l'insieme vuoto. Quindi la serie non converge per nessun valore di α.

Esercizio 4 Studiare il limite della successione

$$a_n = \left(1 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{2n}.$$

Soluzione

Osserviamo che

$$\sin\left(\frac{(2n)\pi}{2}\right) = 0$$
$$\sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = 1$$
$$\sin\left(\frac{(4n-1)\pi}{2}\right) = -1$$

quindi posso estrarre le tre sottosuccessioni

$$a_{2n} = 1$$
$$a_{4n+1} = 2^{2n}$$
$$a_{4n-1} = 0.$$

I limiti delle tre estratte sono rispettivamente 1, $+\infty$ e 0, diversi tra di loro, quindi la successione a_n non ha limite.