Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 26 febbraio 2011

Domanda 1 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

A) non è limitata superiormente B) ha minimo

C) è limitata inferiormente ma non ha minimo

$\boxed{\text{B}}$

D) è limitata superiormente ma non ha massimo

Domanda 2

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + n\cos n}{7^n + n^3}}$$

A) non esiste B) vale $+\infty$

$\boxed{\text{D}}$

C) vale 0 D) è un numero reale diverso da 0

Domanda 3

$$\sum_{n\geq 2} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n + (-1)^n}$$

A) diverge a $+\infty$ B) è indeterminata

$\boxed{\text{C}}$

C) converge assolutamente D) converge semplicemente ma non assolutamente

Domanda 4

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^2}\, dx$$

A) non esiste B) converge

$\boxed{\text{B}}$

C) diverge a $+\infty$ D) diverge a $-\infty$

Domanda 5 Data $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^{4x} \frac{e^t}{(|t| + 1)\cosh t}\, dt$$

risulta che $F'(1) =$

$\boxed{\text{B}}$

A) 0 B) $\dfrac{8e^8}{5(e^8 + 1)}$ C) non esiste D) $\dfrac{4e^2}{e^2 + 1}$

Domanda 6

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin(x^2)\, dx =$$

A) -1 B) $\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

C) 1 D) $\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 7 Sia $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e strettamente crescente. Allora, necessariamente

A) f' non si annulla mai B) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

C) f è limitata D) f non ha né massimo né minimo

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 8

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2 + 12x^3 + 3|x|^{\frac{7}{2}}}{\sinh(2x^2)} =$$

A) 0 B) $+\infty$

C) non esiste D) $\frac{5}{2}$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 9 La serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n + 2\sin n}$$

A) converge assolutamente B) è indeterminata

C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge a $+\infty$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 10 La successione

$$a_n = \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right)$$

A) non ha limite e non è limitata B) non ha limite ma è limitata

C) è infinitesima D) tende a $+\infty$

$\boxed{\text{B}}$

Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 26 febbraio 2011

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{y^4(x)} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

determinandone l'intervallo massimale di definizione.

Soluzione

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili ed è definita per $y \neq 0$. Separando le variabili e integrando otteniamo

$$\int y^4\,dy = \int x\,dx$$

quindi

$$\frac{y^5}{5} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Determiniamo c imponendo la condizione iniziale

$$\frac{1}{5} = 0 + c.$$

La soluzione è quindi

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^{\frac{1}{5}}$$

che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente

$$\sum_n \frac{(6^{\alpha-1})^n}{n^2 3^n}.$$

Soluzione

La serie è a termini positivi, applichiamo quindi il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(6^{\alpha-1})^n}{n^2 3^n}} = \frac{6^{\alpha-1}}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{6^{\alpha-1}}{3}.$$

La serie data converge quindi se $\frac{6^{\alpha-1}}{3} < 1$ e diverge positivamente se $\frac{6^{\alpha-1}}{3} > 1$. Se invece $\frac{6^{\alpha-1}}{3} = 1$ il criterio della radice non fornisce alcuna informazione. In tal caso la serie diventa

$$\sum_n \frac{1}{n^2}$$

che è una serie armonica generalizzata di ordine 2, quindi convergente. Risolvendo le disuguaglianze rispetto ad α otteniamo quindi che

$$\text{se } \alpha \leq \frac{\log 3}{\log 6} + 1 \text{ la serie converge}$$

$$\text{se } \alpha > \frac{\log 3}{\log 6} + 1 \text{ la serie diverge positivamente.}$$

Esercizio 3 Studiare la funzione

$$f(x) = (3-x)e^{x^2+1}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), punti di massimo e minimo locali ed eventuali asintoti.

Soluzione

La funzione è definita su tutta la retta reale ed è ovunque continua e derivabile in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili. Vediamo il comportamento all'inifinito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (-\infty)e^{+\infty} = -\infty.$$

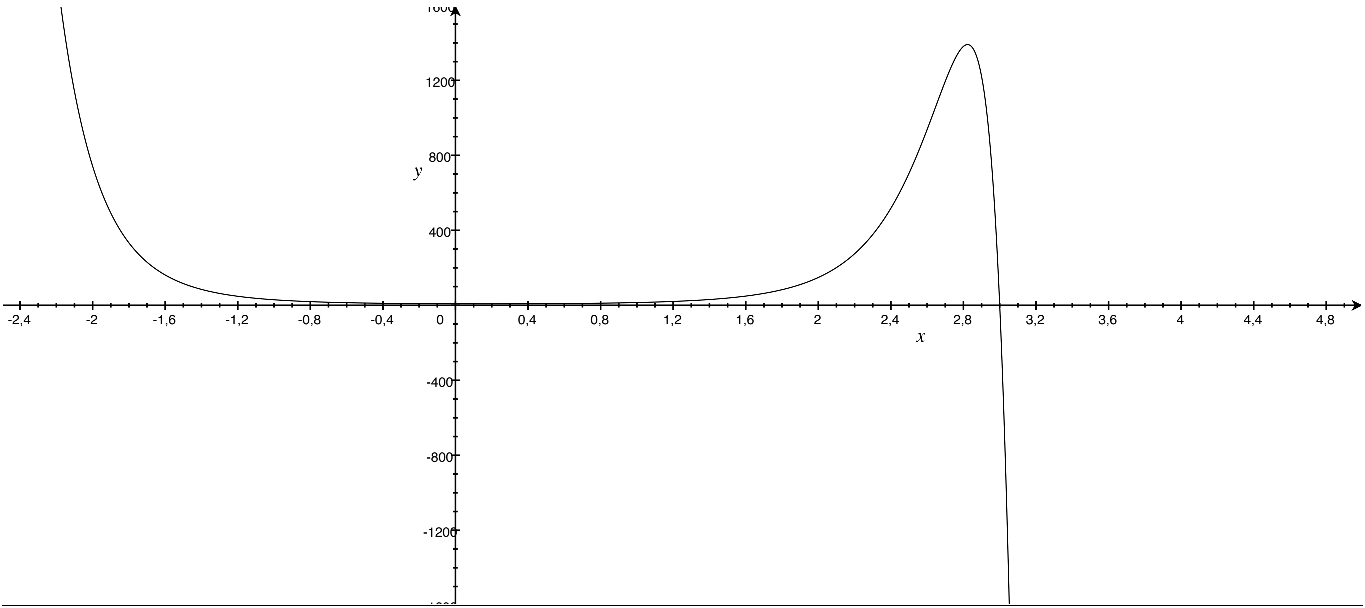
Dai risultati sui limiti si deduce subito che la funzione non ha né massimo né minimo e che l'estremo superiore è $+\infty$ e l'estremo inferiore è $-\infty$. Calcoliamo ora la derivata

$$f'(x) = e^{x^2+1}(-2x^2 + 6x - 1)$$

il cui segno dipende unicamente da quello del trinomio $-2x^2 + 6x - 1$. Le radici sono

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}, \qquad x_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

quindi avremo che la funzione è crescente se $x \in \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$ mentre è decrescente su ciascuna delle due semirette $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$. Il punto x_1 è di minimo locale e x_2 è di massimo locale.



y
x
1200
800
400
-400
-800
-1200
-2,4
-2
-1,6
-1,2
-0,8
-0,4
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2
2,4
2,8
3,2
3,6
4
4,4
4,8