Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 12 febbraio 2011

Domanda 1 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin^2 x$. La funzione f è
A) iniettiva B) surgettiva

C) né iniettiva né surgettiva D) bigettiva

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 2 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e strettamente convessa. Allora, necessariamente
A) f ha minimo B) f non ha massimo

C) f ha un asintoto orizzontale D) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 3 Sia $f : [3,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log x + \sin^2 x$.
A) f ha sia massimo che minimo B) f ha massimo ma non ha minimo

C) f ha minimo ma non ha massimo D) f non ha né massimo né minimo

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 4 Ricordando che $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, allora $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} =$

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $+\infty$

C) 1 D) 0

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 5 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n =$
A) $-\infty$ B) $+\infty$

C) $\dfrac{1}{2}$ D) 0

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 6 La serie $\sum_n \frac{4^{3n}}{2n^2 7^n}$

A) è indeterminata B) converge assolutamente

$\boxed{\text{D}}$

C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge a $+\infty$

Domanda 7 La serie $\sum_n \frac{\cos n}{n^2(1+\log n)}$

A) diverge a $+\infty$ B) converge assolutamente

$\boxed{\text{B}}$

C) è indeterminata D) diverge a $-\infty$

Domanda 8 Una primitiva della funzione $f(x) = \frac{2x}{x^2+2} + 1$ è

A) $x^2 + 2 + x$ B) $\frac{2x^2+4-x^3-2x}{(x^2+2)^2}$

$\boxed{\text{C}}$

C) $\log(x^2+2) + x$ D) $\log\left(\log(x^2+2)\right)$

Domanda 9 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx =$

A) 2 B) non esiste

$\boxed{\text{A}}$

C) 0 D) π

Domanda 10 $\int_2^{+\infty} \frac{x \log x}{1 + \log^2 x} \, dx$

A) diverge a $-\infty$ B) converge

$\boxed{\text{D}}$

C) non esiste D) diverge a $+\infty$

Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 12 febbraio 2011

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^\alpha \log x}{1+\log^2 x}.$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione, possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Notiamo anche che l'integranda è definita e continua in tutti i punti della semiretta $(1, +\infty)$, basterà quindi esaminarne il comportamento negli estremi. Esaminiamo prima il punto $x = 1$. Ricordiamo lo sviluppo di Taylor del logaritmo:

$$\log(1+t) = t + o(t) \qquad t \to 0.$$

Quindi

$$\log x = \log(1 + (x-1)) = (x-1) + o(x-1) \qquad x \to 1.$$

Allora

$$\frac{(x-1)^\alpha \log x}{1+\log^2 x} \sim (x-1)^{\alpha+1} = \frac{1}{(x-1)^{-\alpha-1}} \qquad x \to 1$$

e l'integrale, in un intorno destro di 1 converge se $-\alpha - 1 < 1$ cioè se $-2 < \alpha$. Guardiamo ora l'andamento all'infinito.

$$\frac{(x-1)^\alpha \log x}{1+\log^2 x} \sim \frac{x^\alpha \log x}{1+\log^2 x} \sim \frac{x^\alpha}{\log x} = \frac{1}{x^{-\alpha}\log x}$$

e l'ultima funzione ha integrale convergente all'infinito se e solo se $-\alpha > 1$ cioè se $\alpha < -1$. Intersecando le due condizioni otteniamo che l'integrale converge se e solo se $-2 < \alpha < -1$.

Esercizio 2 Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}}{e^n}.$$

Soluzione

Calcoliamo il logaritmo della successione e utilizziamo lo sviluppo in serie di Taylor del logaritmo

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad t \to 0$$

con $t = \frac{1}{n}$.

$$\log a_n = n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n = -\frac{1}{2} + o(1)$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = -\frac{1}{2}$$

e di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Esercizio 3 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x\sin^2 x - x^3)(e^x - \cos x)}{5x\log(1+x^4)\sin x}.$$

Soluzione

Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$e^x = x + o(x) \qquad x \to 0$$

$$\cos x = 1 + o(x) \qquad x \to 0$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \qquad t \to 0, \quad t = x^4.$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned}\frac{(x\sin^2 x - x^3)(e^x - \cos x)}{5x\log(1+x^4)\sin x} &= \frac{[x(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 - x^3](1 + x + o(x) - 1 + o(x))}{5x(x^4 + o(x^4))(x + o(x))} \\ &= \frac{[x(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)) - x^3](x + o(x))}{(5x^5 + o(x^5))(x + o(x))} = \frac{(-\frac{x^5}{3} + o(x^5))(1 + o(1))}{(5x^5 + o(x^5))(1 + o(1))}\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x\sin^2 x - x^3)(e^x - \cos x)}{5x\log(1+x^4)\sin x} = -\frac{1}{15}.$$