Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 20 settembre 2010

Domanda 1 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\, e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

A) ha un asintoto verticale B) ha un asintoto orizzontale

D

C) non ha asintoti di nessun tipo D) ha un asintoto obliquo

Domanda 2 Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $0 < b_n < a_n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora risulta necessariamente che

A) $\sum_n \frac{b_n^2}{n}$ converge B) $\sum_n a_n\, b_n$ diverge

D

C) $\sum_n (a_n - b_n)$ converge D) $\sum_n \frac{a_n b_n}{n^2}$ converge

Domanda 3 L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|} > 1\right\}$ è

A) aperto B) limitato inferiormente

A

C) limitato superiormente D) un intervallo

Domanda 4 Nel punto $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\log(x^2 + 1)} & \text{se } x > 0 \\[2ex] \dfrac{2x^2 + x^3}{(x-1)^2} & \text{se } x \le 0 \end{cases}$

A) è continua a sinistra B) è continua a destra

A

C) è continua D) non è definita

Domanda 5 L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}}$

A) converge B) non esiste

C

C) diverge positivamente D) diverge negativamente

Domanda 6 Sia (a_n) una successione tale che $\log n < a_n < 2\log n$ per ogni $n > 2$. Allora risulta necessariamente che

A) $\sum_n e^{-a_n}$ converge B) $\sum_n e^{-2a_n}$ converge

C) $\sum_n e^{-a_n}$ diverge D) $\sum_n e^{-(a_n+1)}$ diverge

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 7 Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $a_n > 0,\ b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ e (a_n) è limitata. Allora risulta necessariamente che

A) $a_n\, b_n$ non è limitata B) $\lim_{n\to\infty} a_n^2 b_n = +\infty$

C) $b_n + \log a_n$ non è limitata D) $a_n - \log b_n$ non è limitata

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 8 Sia $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e dispari. Allora risulta necessariamente che

A) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x^2}\, dx = 0$ B) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x}\, dx$ converge

C) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x^2}\, dx$ diverge D) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}\, dx = 0$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 9 Sia $G(x) = \int_{e^x}^{0} \frac{t}{1+t^2}\, dt$. Allora risulta che

A) $G'(x) = -\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ B) $x = 0$ è punto di minimo locale per G

C) $G(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ D) G è limitata in $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 10 La successione $a_n = \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^{\tan\frac{1}{n}}$, definita per $n \geq 1$,

A) non ha limite B) tende a 1

C) tende a 0 D) tende a $+\infty$

$\boxed{\text{B}}$

codice 785047

Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 20 settembre 2010

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta mancante vale 0. Consegnare solo il presente foglio e riportare le risposte sull'altro che deve essere conservato per confrontare le risposte. Per accedere alla seconda prova o concludere l'esame è necessario un punteggio maggiore o uguale a 5.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

codice 785047

Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 20 settembre 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x(1+\tan^2 x)}\, dx.$

Soluzione

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x(1+\tan^2 x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x(\cos^2 x+\sin^2 x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Esercizio 2 Determinare al variare di $\alpha \in (0,+\infty)$ il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right).$$

Soluzione

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor centrati in 0

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\log(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + o(s^2)$$

e osserviamo che se $\alpha > 0$ allora $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ per $n \to \infty$, quindi, sostituendo $t = \frac{1}{n}$ e $s = \frac{1}{n^\alpha}$ otteniamo che il termine generale a_n della serie data si esprime nel seguente modo:

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Se $0 < \alpha < 1$ allora

$$a_n = -\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

quindi la serie è definitivamente a termini negativi e, per il criterio del confronto asintotico, diverge negativamente.
Se $\alpha = 1$ allora

$$a_n = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

quindi la serie è definitivamente a termini positivi e, per il criterio del confronto asintotico, converge.
Se $\alpha > 1$ allora

$$a_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

quindi la serie è definitivamente a termini positivi e, per il criterio del confronto asintotico, diverge positivamente.

Esercizio 3 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 9y''(x) + 4y(x) = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzione

Risolviamo prima l'equazione omogenea associata

$$9y'' + 4y = 0$$

che ha polinomio caratteristico

$$9t^2 + 4.$$

Le radici del polinomio sono $t_1 = -\frac{2}{3}i$ e $t_2 = \frac{2}{3}i$ che danno origine alle due soluzioni fondamentali

$$y_1 = \cos\left(\frac{2}{3}x\right), \qquad y_2 = \sin\left(\frac{2}{3}x\right).$$

Le soluzioni dell'omogenea sono quindi tutte e sole le funzioni della forma

$$y = c_1 \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo dei coefficienti indeterminati. Poiché i non è radice del polinomio caratteristico, possiamo cercare una soluzione della forma

$$y_0(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Derivando due volte otteniamo

$$y_0' = -A\sin x + B\cos x, \qquad y_0'' = -A\cos x - B\sin x$$

e sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo

$$-5A\cos x - 5B\sin x = \sin x.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} -5A = 0 \\ -5B = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $A = 0,\ B = -\frac{1}{5}$. Una soluzione particolare è quindi

$$y_0 = -\frac{1}{5}\sin x.$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale è quindi

$$y = c_1\cos\left(\frac{2}{3}x\right) - c_2\sin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{5}\sin x$$

al variare di c_1 e c_2. Deriviamo quindi questa espressione ottenendo

$$y' = -\frac{2}{3}c_1\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}c_2\cos\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{5}\cos x.$$

Valutiamo la y e la y' nel punto $x = 0$

$$y(0) = c_1, \qquad y'(0) = \frac{2}{3}c_2.$$

Imponendo le condizioni iniziali del problema di Cauchy risulta che deve essere $c_1 = 1$ e $c_2 = 3$. La soluzione è quindi

$$y(x) = \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{5}\sin x.$$