Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 24 luglio 2010

Domanda 1 Il limite $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+\sin x)}{1+\sin x - e^x}$$

A) vale $+\infty$ B) vale $-\infty$

C) vale $-\dfrac{1}{2}$ D) vale 0

A

Domanda 2 Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{t\log(1+t)}{t^2+3}$. Risulta

A) $F'(1) = 0$ B) $F'(1) = \dfrac{\log 2 + 1}{8}$

C) $F'(1) = \dfrac{\log 2}{2}$ D) $F'(1) = \dfrac{\log 2}{4}$

C

Domanda 3 La successione $a_n = \dfrac{\log(1+e^{(n^4)})}{n} \sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

A) converge B) non è limitata

C) non ha limite D) diverge positivamente

A

Domanda 4 Sia (a_n) una successione tale che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora risulta necessariamente che

A) e^{1/a_n} non è limitata B) $\dfrac{1}{a_n^2 - a_n}$ diverge positivamente

C) $\dfrac{1}{1-e^{a_n}}$ non converge D) $\sin\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ non ha limite

C

Domanda 5 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e strettamente concava tale che $f'(0) = 1$. Allora risulta necessariamente che

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

C) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ D) f ha massimo

C

Domanda 6 Sia $f(x) = (\cos x)^{\log x}$ allora $f'(x) =$

A) $\log x(\cos x)^{\log x - 1}$ B) $(\cos x)^{\log x}\left[\dfrac{\log(\cos x)}{x} - \tan x \log x\right]$

C) $\dfrac{(-\sin x)^{\log x}}{x}$ D) $(-\sin x)^{1/x}$

B

Domanda 7 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{0} \sinh t \, dt$

A) è limitata superiormente B) è limitata inferiormente

C) è debolmente crescente D) ha minimo

A

Domanda 8 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e debolmente crescente e sia $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2} f(t) \, dt$. Allora risulta necessariamente che

A) $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ B) F è limitata inferiormente

C) se $f(0) > 0$ allora F è debolmente crescente per $x \geq 1$ D) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

C

Domanda 9 Sia (a_n) una successione di numeri reali strettamente positivi tale che $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = +\infty$. Allora risulta necessariamente che

A) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n}$ converge B) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ diverge positivamente

C) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge positivamente D) $\displaystyle\sum_n \frac{\log n}{a_n^2}$ converge

D

Domanda 10 Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $0 < a_n^2 < b_n$ per ogni n. Allora risulta necessariamente che

A) se $\displaystyle\sum_n a_n$ diverge anche $\displaystyle\sum_n b_n$ diverge B) se $\displaystyle\sum_n b_n$ converge allora anche $\displaystyle\sum_n a_n$ converge

C) se $\displaystyle\sum_n b_n$ converge anche $\displaystyle\sum_n (a_n b_n)$ converge D) se $\displaystyle\sum_n b_n$ diverge anche $\displaystyle\sum_n a_n$ diverge

C

Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 24 luglio 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_n \left(e^{3/n} - 1 - \frac{\alpha}{n}\right)\sqrt{n}$$

Soluzione

Osserviamo che, utilizzando il polinomio di Taylor della funzione esponenziale centrato in 0, otteniamo, per $n \to \infty$

$$\left(e^{3/n} - 1 - \frac{\alpha}{n}\right)\sqrt{n} = \left[1 + \frac{3}{n} + \frac{9}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \frac{\alpha}{n}\right]\sqrt{n} = \frac{3-\alpha}{\sqrt{n}} + \frac{9}{2n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

che è asintotico a $\frac{1}{\sqrt{n}}$ se $\alpha \neq 3$ e a $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ se $\alpha = 3$. Sempre dalla precedente espansione di Taylor si deduce che il termine generale della serie ha parte principale di infinitesimo con coefficiente che è definitivamente positivo se $\alpha \leq 3$ e definitivamente negativo se $\alpha > 3$ (nel caso $\alpha = 3$ infatti la parte principale diventa $\frac{9}{2n^{\frac{3}{2}}}$ che ha coefficiente positivo). Ne segue che per ogni valore di α la serie è definitivamente a termini di segno costante ed è possibile applicare il criterio del confronto asintotico. Quindi se $\alpha \neq 3$ la serie è asintotica a un'armonica di ordine $\frac{1}{2}$, quindi divergente (positivamente se $\alpha < 3$, negativamente se $\alpha > 3$). Se invece $\alpha = 3$ la serie è asintotica a un'armonica di ordine $\frac{3}{2}$, quindi convergente.

Esercizio 2 Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha \neq 0$, il seguente integrale converge

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^{1/\alpha})}{\sqrt[9]{x} + x}$$

Soluzione

Osserviamo inizialmente che la funzione integranda è positiva e continua per ogni $x \in (0, 1]$ mentre per $x = 0$ non è definita. Esaminiamo prima il caso $\alpha > 0$. In questo caso otteniamo che

$$\lim_{x \to 0} x^{1/\alpha} = 0.$$

Per determinare l'andamento asintotico dell'integranda utilizziamo lo sviluppo di Taylor dell'arcotangente nell'origine

$$\arctan t = t + o(t).$$

Con la sostituzione $t = x^{1/\alpha}$ otteniamo che

$$\frac{\arctan(x^{1/\alpha})}{\sqrt[9]{x}+x} = \frac{x^{1/\alpha}+o(x^{1/\alpha})}{x^{1/9}+x} = \frac{x^{1/\alpha}+o(x^{1/\alpha})}{x^{\frac{1}{9}}(1+x^{\frac{8}{9}})} \sim \frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{x^{\frac{1}{9}}} = \frac{1}{x^{\frac{\alpha-9}{9\alpha}}}$$

Per il criterio del confronto asintotico si ottiene che l'integrale converge se e solo se $\frac{\alpha-9}{9\alpha} < 1$ cioè se $\alpha > -\frac{9}{8}$. Dato che stavamo considerando il caso $\alpha > 0$ otteniamo semplicemente che per ogni $\alpha > 0$ l'integrale converge.

Se invece $\alpha < 0$ otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/\alpha} = +\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(x^{1/\alpha}) = \frac{\pi}{2}$$

e di conseguenza

$$\frac{\arctan(x^{1/\alpha})}{\sqrt[9]{x}+x} \sim \frac{1}{\sqrt[9]{x}+x} \sim \frac{1}{x^{1/9}}.$$

Dato che $\frac{1}{9} < 1$, dal criterio del confronto asintotico otteniamo subito che l'integrale converge anche se $\alpha < 0$. In conclusione l'integrale converge per ogni $\alpha \neq 0$.

Esercizio 3 Studiare la funzione $f(x) = (3x^2+1)e^{x+2}$ determinandone asintoti, punti di massimo o minimo locali, massimo e minimo o estremi inferiore e superiore e intervalli di concavità e convessità.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre è di classe C^∞ su tutto il suo insieme di definizione. Vediamo i limiti. Utilizzando ad esempio il teorema di De l'Hôpital otteniamo che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{e^{-x-2}} = 0$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

Quindi f ha l'asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = 0$. Con calcoli analoghi ai precedenti si verifica immediatamente che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

che implica la mancanza di asintoti obliqui. Osserviamo anche che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi, dal risultato sul limite a $-\infty$ ricaviamo che

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$$

e che f non ha minimo (assoluto). Dal risultato sul limite a $+\infty$ otteniamo inoltre che f non ha massimo (assoluto) e che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima
$$f'(x) = e^{x+2}(3x^2 + 6x + 1).$$
La funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, quindi la derivata prima prende il segno del polinomio $3x^2 + 6x + 1$ che ha radici $x = -1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ dove la derivata si annulla. La funzione è quindi crescente nelle semirette $\left(-\infty, -1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ e $\left(-1 + \sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$ mentre è decrescente nell'intervallo $\left(-1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, -1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Il punto $x = -1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ è di massimo locale e il punto $x = -1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$ è di minimo locale. Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda
$$f''(x) = e^{x+2}(3x^2 + 12x + 7).$$
Anche in questo caso il segno è determinato solo da quello del polinomio, che si annulla per $x = -2 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$. La derivata seconda è quindi positiva per $x < -2 - \sqrt{\frac{5}{3}}$ e per $x > -2 + \sqrt{\frac{5}{3}}$ mentre è negativa se $-2 - \sqrt{\frac{5}{3}} < x < -2 + \sqrt{\frac{5}{3}}$. La funzione è convessa nelle due semirette $\left(-\infty, -2 - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ e $\left(-2 + \sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right)$, concava nell'intervallo $\left(-2 - \sqrt{\frac{5}{3}}, -2 + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ e i due punti $x = -2 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$ sono di flesso.