Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

# Analisi Matematica I

Pisa, 3 luglio 2010

**Domanda 1** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$. Allora, necessariamente

$$\int_1^e f'(x \log x)(\log x + 1)\, dx =$$

A) $2f(e) - f(0)$ B) $f(e) - f(0)$

C) $-\infty$ D) $f'(e) - f'(0)$

B

**Domanda 2** La successione $a_n = \dfrac{e^n}{n} - \cos n$

A) non ha limite B) tende a $-\infty$

C) è limitata inferiormente D) è a segni alternati

C

**Domanda 3** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata superiormente. Allora, necessariamente

A) $\dfrac{1}{f}$ è limitata inferiormente B) $\dfrac{f}{1+f^2}$ è limitata superiormente

C) $|f|$ è limitata superiormente D) $-f$ non è limitata superiormente

B

**Domanda 4** Siano $(a_n)$ e $(b_n)$ due successioni tali che $a_n\, b_n = 1$ per ogni $n$. Necessariamente risulta che

A) se $\sum_n b_n$ coverge allora $\sum_n \dfrac{a_n}{b_n}$ diverge B) $\sum_n (a_n + b_n)$ diverge

C) se $\sum_n a_n$ converge allora $\sum_n b_n$ diverge D) $\sum_n (a_n - b_n)$ converge

A

**Domanda 5** Data $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile e strettamente crescente sia $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^4} f(t)\, dt$.

Risulta necessariamente che

A) se $f(0) > 0$ allora $F$ è strettamente convessa in $(0, +\infty)$ B) $F$ non è convessa in $(0, +\infty)$

C) $F$ è debolmente crescente in $(0, +\infty)$ D) $F$ è debolmente decrescente in $(0, +\infty)$

A

**Domanda 6**
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{2+n^2}} =$$

A) $0$ B) $\frac{1}{2}$

C) $+\infty$ D) $1$

D

**Domanda 7** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - |x|$. Allora
A) $x = 0$ è punto di flesso per $f$ B) $x = 0$ è punto di massimo locale per $f$

C) $x = 0$ è punto di minimo locale per $f$ D) $0$ è il minimo di $f$

B

**Domanda 8** Sia $f(x) = \arctan\left(\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)$. Allora, nel suo insieme di definizione
A) $f$ è debolmente crescente B) $f$ ha massimo

C) $f$ ha minimo D) $f$ non è limitata inferiormente

B

**Domanda 9** Sia $(a_n)$ una successione tale che $n < a_n < n^2$ per ogni $n \geq 1$. Allora, necessariamente risulta che
A) $\sum_n \left(1 - \cos\frac{1}{a_n}\right)$ converge B) $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge

C) $\sum_n \frac{1}{a_n \log n}$ converge D) $\sum_n \frac{1}{a_n}$ converge

A

**Domanda 10** Sia $f(x) = x^3 e^{-x}$. Allora
A) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$ B) $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

C) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ D) $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ esiste finito

A

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

# Analisi Matematica I

Pisa, 3 luglio 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1** Studiare la funzione $f : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$, determinandone eventuali asintoti, punti di massimo o minimo locali e assoluti, estremi superiore e inferiore.

## Soluzione

Osserviamo preliminarmente che $f(\pi - x) = f(x)$ quindi il grafico della funzione è simmetrico rispetto alla retta $x = \frac{\pi}{2}$. Basterà quindi studiare la funzione nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$. Risulta utile, nello svolgimento dei calcoli che seguono, scrivere la funzione nella seguente forma:

$$f(x) = e^{\sin x \log(\sin x)}$$

Dato che $\sin x > 0$ per ogni $x \in (0, \pi)$, la funzione è definita in tutto il suo dominio. Resta da fare il limite negli estremi dell'intervallo. Utilizzando il teorema sul limite della composizione di funzioni e ricordando che la funzione $\sin x$ è continua in 0 si ottiene che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\sin x \log(\sin x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x \log(\sin x))} = e^{\lim\limits_{t \to 0^+} (t \log t)} = e^0 = 1$$

Per le questioni di simmetria citate in precedenza si ottiene subito che

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 1$$

Calcoliamo ora la derivata della funzione

$$f'(x) = e^{\sin x \log(\sin x)} (\cos x \log(\sin x) + \cos x) = e^{\sin x \log(\sin x)} \cos x \,(\log(\sin x) + 1)$$

Vediamone ora il segno:

$$e^{\sin x \log(\sin x)} > 0 \qquad \forall x \in (0, \pi)$$

$$\cos x > 0 \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\log(\sin x) + 1 > 0 \iff \sin x > \frac{1}{e} \iff \arcsin \frac{1}{e} < x < \pi - \arcsin \frac{1}{e}$$

Intersecando i risultati ottenuti si ha che

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(\arcsin \frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi - \arcsin \frac{1}{e}, \pi\right)$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in \left(0, \arcsin \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin \frac{1}{e}\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \arcsin\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\frac{1}{e}$$

Ne segue che la funzione $f$ è strettamente decrescente in $\left(0, \arcsin\frac{1}{e}\right]$, strettamente crescente in $[\arcsin\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\frac{1}{e}\right]$ e strettamente crescente in $[\pi - \arcsin\frac{1}{e}, \pi)$. I punti $x = \arcsin\frac{1}{e}, \pi - \arcsin\frac{1}{e}$ sono punti di minimo assoluto, mentre il punto $x = \frac{\pi}{2}$ è di massimo locale. Osservando che $f(\frac{\pi}{2}) = 1^1 = 1$ otteniamo che il massimo assoluto della funzione vale 1. Il minimo assoluto è invece $f(\arcsin\frac{1}{e}) = f(\pi - \arcsin\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}}$.

**Esercizio 2** Determinare per quali valori di $\alpha \in (0, +\infty)$ la serie

$$\sum_n \frac{(5 + \log\alpha)^n}{\sqrt{n} + 3}$$

converge e per quali $\alpha$ converge assolutamente.

**Soluzione**

Esaminiamo prima la convergenza assoluta. Cerchiamo di applicare il criterio della radice. Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n} + 3} = 1$$

quindi se $|5 + \log\alpha| < 1$ si ottiene la convergenza assoluta della serie. Questo avviene se

$$-1 < 5 + \log\alpha < 1 \iff -6 < \log\alpha < -4 \iff e^{-6} < \alpha < e^{-4}$$

Se invece $\alpha > e^{-4}$ oppure se $\alpha < e^{-6}$ sempre il criterio della radice ci assicura che la serie non converge assolutamente. Se $\alpha = e^{-6}$ oppure $\alpha = e^{-4}$ la serie (dei valori assoluti) diventa

$$\sum_n \left|\frac{(5 + \log\alpha)^n}{\sqrt{n} + 3}\right| = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n} + 3}$$

che per il criterio del confronto asintotico diverge, essendo

$$\frac{1}{\sqrt{n} + 3} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Per quanto riguarda la convergenza semplice otteniamo che sicuramente sussiste per $\alpha \in (e^{-6}, e^{-4})$ a causa della convergenza assoluta. Se $\alpha > e^{-4}$ il termine generale tende a $+\infty$ mentre se $\alpha < e^{-6}$ non esiste il limite. In entrambi i casi viene a mancare la condizione necessaria per la convergenza. Se $\alpha = e^{-4}$, come menzionato in precedenza, la serie è asintotica a una serie armonica di esponente $\frac{1}{2}$, quindi divergente. Se invece $\alpha = e^{-6}$ la serie diventa

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 3}$$

che converge per il criterio di Leibniz, dato che la successione $\frac{1}{\sqrt{n}+3}$ è decrescente, positiva e infinitesima. Riassumendo, la convergenza assoluta si ha per $\alpha \in (e^{-6}, e^{-4})$ e quella semplice per $\alpha \in [e^{-6}, e^{-4})$.

**Esercizio 3** Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|x|^{\frac{3}{2}} e^{\tan x}}{e^{2\tan x} - 2e^{\tan x} + 1}\, dx$$

**Soluzione**

Esaminiamo prima di tutto il denominatore della funzione integranda osservando che è uguale a $(e^{\tan x} - 1)^2$ e che si annulla solo se $e^{\tan x} = 1$ cioè se $x = 0$. Quindi la funzione è definita e continua in ogni punto di $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a parte il punto $x = 0$. Osserviamo anche che l'integranda è positiva, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Vediamo il comportamento negli estremi dell'intervallo di integrazione:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{|x|^{\frac{3}{2}} e^{\tan x}}{e^{2\tan x} - 2e^{\tan x} + 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{e^{\tan x} - 2 + e^{-\tan x}} = \frac{(\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{2}}}{+\infty - 2 + 0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \frac{|x|^{\frac{3}{2}} e^{\tan x}}{e^{2\tan x} - 2e^{\tan x} + 1} = \frac{(\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{2}} \cdot 0}{0 - 2\cdot 0 + 1} = 0.$$

L'integranda è limitata in un intorno degli estremi e quindi non presenta problemi di integrabilità. Resta da esaminare solo il punto $x = 0$. Osserviamo prima di tutto che

$$\lim_{x\to 0} e^{\tan x} = 1$$

quindi questo fattore non contribuisce in nessun modo nel confronto asintotico. Per il denominatore teniamo invece presenti i polinomi di Taylor della tangente e dell'esponenziale

$$\tan x = x + o(x), \qquad e^t = 1 + t + o(t)$$

Avremo quindi, per $x \to 0$

$$(e^{\tan x} - 1)^2 = (e^{x+o(x)} - 1)^2 = (1 + x + o(x) - 1)^2 = x^2 + o(x^2)$$

ne segue che

$$\frac{|x|^{\frac{3}{2}} e^{\tan x}}{e^{2\tan x} - 2e^{\tan x} + 1} = \frac{|x|^{\frac{3}{2}}(1 + o(1))}{x^2 + o(x^2)} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Dato che l'ultima funzione ha integrale improprio finito in un intorno di 0, dal criterio del confronto asintotico otteniamo che entrambi gli integrali impropri

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{|x|^{\frac{3}{2}} e^{\tan x}}{e^{2\tan x} - 2e^{\tan x} + 1}\, dx, \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|x|^{\frac{3}{2}} e^{\tan x}}{e^{2\tan x} - 2e^{\tan x} + 1}\, dx$$

sono convergenti, quindi anche l'integrale proposto lo è.