Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 12 giugno 2010

Domanda 1 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Risulta che

A) f è limitata ma non ha minimo B) f non è limitata

C) f ha minimo D) f è monotona sulla semiretta $(-\infty, 0]$

C

Domanda 2 Sia (a_n) una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$. Allora, necessariamente

A) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ B) esiste una sottosuccessione estratta da (a_n) che converge a 1

C) la successione (a_n) non ha limite D) $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi a_n) = 0$

D

Domanda 3 Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $|a_n - b_n| > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Necessariamente

A) se $\sum_n a_n$ diverge anche $\sum_n b_n$ diverge B) se $\sum_n a_n$ converge allora $\sum_n b_n$ non converge

C) se $\sum_n b_n$ converge anche $\sum_n a_n$ converge D) se $\sum_n b_n$ diverge allora $\sum_n a_n$ converge

B

Domanda 4 Sia $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin|x| \log(1 + x)$. Risulta che

A) f non è derivabile in 0 B) f è pari

C) il grafico di f ha tangente orizzontale per $x = 0$ D) 0 è un punto di minimo locale per f

C

Domanda 5 La successione $a_n = 3n + \sin n$

A) non ha limite B) è limitata

C) è strettamente crescente D) non ha minimo

C

Domanda 6 Sia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{(e^{x^2} - 1)\sqrt{x}\,\log(1+x)}$. Allora

A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = -\infty$ B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = +\infty$

C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ esiste finito D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ non esiste

C

Domanda 7 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} \geq e^{x}\}$. Risulta che
A) $\inf(A) = 0$ B) A è l'insieme vuoto

C) $\sup(A) = +\infty$ D) $\sup(A) = 0$

D

Domanda 8 Sia (a_n) una successione tale che $\lim_{n\to\infty} n\,a_n = 0$. Allora, necessariamente
A) $\sum_n a_n^2$ converge B) $\sum_n a_n$ diverge

C) $\sum_n a_n$ converge D) $\sum_n \sqrt{|a_n|}$ diverge

A

Domanda 9 Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+(f(x))^2}\,dx$ esiste finito B) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{|f(x)|+1}\,dx = +\infty$

C) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste D) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan f(x)}{x^2}\,dx$ esiste finito

D

Domanda 10 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x\sqrt{x}}\,dx$

A) vale $+\infty$ B) non esiste

C) esiste finito D) vale $-\infty$

B

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica ed Energetica

Analisi Matematica I

Pisa, 12 giugno 2010

| | | | | | | | | | | | | | | | (Cognome) | | | | | | | | | | (Nome) | | | | | | (Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n^n}}$$

Soluzione

Consideriamo la successione reciproca definendo

$$a_n = \frac{\sqrt{n^n}}{n!}$$

e utilizziamo il criterio del rapporto (la successione è a valori positivi).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}} = \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n+1)n^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow 0 \cdot \sqrt{e} = 0$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ed essendo $a_n > 0$ si ottiene subito che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n^n}} = +\infty.$$

Esercizio 2 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4y + e^{3x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione differenziale è del primo ordine lineare, quindi utilizziamo la formula risolutiva

$$y = e^{A(x)}\left(c + \int e^{-A(x)} b(x)\, dx\right), \qquad A(x) = \int a(x)\, dx.$$

Nel nostro caso $a(x) = 4$, $b(x) = e^{3x}$, quindi

$$A(x) = 4x, \qquad \int e^{-A(x)} b(x)\, dx = \int e^{-4x} e^{3x}\, dx = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$$

dove non abbiamo aggiunto le costanti arbitrarie perché già presenti nella formula risolutiva. Ne segue che

$$y(x) = e^{4x}(c - e^{-x}) = ce^{4x} - e^{3x}.$$

Calcoliamo la costante c ricavandola dalla condizione iniziale

$$0 = y(0) = c - 1$$

quindi $c = 1$ e

$$y(x) = e^{4x} - e^{3x}.$$

Esercizio 3 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3(x-3)^2}$ dire se esistono ed eventualmente calcolare i seguenti due integrali

$$\int_2^{+\infty} f(x)\, dx \qquad \int_3^{+\infty} f(x)\, dx$$

Soluzione

Osserviamo che la f è una funzione continua su tutta la retta reale eccettuati i punti $x = 2$ e $x = 3$ dove non è definita. Verifichiamo se in un intorno di tali punti la f è limitata o no. Per $x = 2$ il numeratore di f vale 0, quindi il polinomio è divisibile per $x - 2$. Eseguendo la divisione fra polinomi otteniamo che

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-2)(x^2 - 6x + 9) = (x-2)(x-3)^2.$$

Allora, semplificando numeratore e denominatore otteniamo che, per $x \neq 2, x \neq 3$

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Ne segue che la funzione è prolungabile con continuità nel punto $x = 3$, mentre presenta un asintoto verticale per $x = 2$. La f è inoltre sempre positiva, quindi i due integrali proposti o convergono o divergono positivamente. Dato che la f diverge in $x = 2$ con esponente 2, si ottiene subito che il primo integrale vale $+\infty$. Per quanto riguarda il secondo integrale invece abbiamo subito la convergenza in quanto la funzione è infinitesima di esponente 2 per $x \to +\infty$. Eseguiamo il calcolo esplicito del secondo integrale, prolungando la f in modo continuo in $x = 3$ ponendola uguale a $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ anche in tale punto. Quindi

$$\int_3^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{M\to+\infty} \int_3^M \frac{1}{(x-2)^2}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{x-2}\right]_3^M = \lim_{M\to+\infty} \frac{-1}{M-2} + 1 = 1.$$