Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 22 febbraio 2010

Domanda 1 Sia $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+2} < 3 - x\right\}$. Allora l'estremo inferiore di A è:

A) 0 B) $\frac{7}{6}$

C) $-\infty$ D) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

C

Domanda 2 Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 + 2n > 5\}$. Allora

A) A non ha né massimo né minimo B) A ha minimo ma non ha massimo

C) A ha massimo ma non ha minimo D) A ha sia massimo che minimo

B

Domanda 3 Il limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3n^3+2n-1}$

A) non esiste B) vale $+\infty$

C) vale 0 D) vale $\frac{1}{3}$

D

Domanda 4 Sia (a_n) una successione di numeri reali strettamente positivi e strettamente crescente. Allora, necessariamente

A) $\sum_n \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge B) $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge

C) $\sum_n \frac{a_n}{n}$ diverge D) $\sum_n \frac{1}{a_n^2}$ converge

C

Domanda 5 Sia $f : [0,6] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $[0,5) \cup (5,6]$ tale che $\lim_{x\to 5^-} f'(x) = \lim_{x\to 5^+} f'(x) = 3$. Allora, necessariamente

A) f è derivabile a destra in 5 e $f'_+(5) = 3$ B) $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = 3$

C) $\lim_{x\to 5} f'(x) - 3 = 0$ D) f è continua in 5

C

Domanda 6 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x^3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

A) f è continua in $\mathbb{R}$ B) f è continua in $[1, +\infty)$

D

C) $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$ D) $f'_-(1) = 1$

Domanda 7 La serie $\sum_n \frac{1 + (-1)^n}{5n + 2}$

A) converge assolutamente B) converge semplicemente ma non assolutamente

C

C) diverge D) è indeterminata

Domanda 8

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^8} \int_0^x t \sin(t^7)\, dt =$$

A) $\frac{7}{24}$ B) 0

B

C) $+\infty$ D) 1

Domanda 9 Data $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile e strettamente crescente sia $F(x) = \int_0^{\alpha(x)} e^t\, dt$. Allora, necessariamente

A) $F(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ B) F è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

B

C) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ D) $F(0) = 0$

Domanda 10 $\int_0^1 x e^{-2x}\, dx =$

A) $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$ B) $-\frac{3}{4}e^{-2}$

A

C) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2}$ D) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$

codice 824833

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 22 febbraio 2010

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

Esercizio 1 Determinare il limite della successione $a_n = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}$ al variare del parametro α in $\mathbb{R}$.

Soluzione

Ricordiamo che

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t) \qquad \text{quando } t \to 0$$

(segue dallo sviluppo di Taylor). Quindi, applicando il precedente risultato con $t = \dfrac{1}{n^2}$ otteniamo che

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Per quanto riguarda il denominatore dobbiamo distinguere tre casi:

$$\text{se } \alpha < 0,\ \frac{1}{n^\alpha} \to +\infty,\ \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \to +\infty$$

$$\text{se } \alpha = 0,\ \frac{1}{n^\alpha} = 1,\ \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \log 2$$

$$\text{se } \alpha > 0,\ \frac{1}{n^\alpha} \to 0,\ \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

dove l'ultimo risultato è stato ottenuto applicando lo sviluppo di Taylor del logaritmo

$$\log(1+t) = t + o(t) \qquad \text{per } t \to 0.$$

Combinando i risultati ottenuti si ha subito che, per $\alpha \leq 0$ non c'è forma di indeterminazione e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Nel caso $\alpha > 0$ serve un esame più preciso. Infatti

$$a_n = \frac{\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)} = \frac{\dfrac{n^{\alpha-2}}{2} + o(n^{\alpha-2})}{1 + o(1)}$$

quindi

$$\text{se } 0 < \alpha < 2, \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\text{se } \alpha = 2, \ \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$\text{se } \alpha > 2, \ \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Riassumendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Esercizio 2 Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = (\cos x)^{\tan x} - \cos(\tan x)$$

limitando lo studio all'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Soluzione

La funzione esponenziale $(\cos x)^{\tan x}$ è definita quando la base è strettamente positiva e quando l'esponente ha senso. Quindi deve essere $\cos x > 0$ e $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Ne segue che il primo addendo della f è definito quando $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Per quanto riguarda il secondo addendo basta considerare l'insieme di definizione della tangente, visto che il coseno è definito in tutta la retta reale. Dovremmo quindi escludere i valori $\pm\frac{\pi}{2}$ che sono però stati esclusi precedentemente. L'insieme di definizione di f è quindi l'intervallo aperto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Essendo l'insieme di definizione limitato, gli unici asintoti possibili sono quelli verticali e possono essere dislocati solo agli estremi dell'insieme di definizione, cioè per $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Osserviamo ora che

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \log(\cos x) = \lim_{t\to 0^+} \log t = -\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (\cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} e^{\tan x \log(\cos x)} = \lim_{t\to +\infty} e^t = +\infty.$$

Per quanto riguarda la funzione $-\cos(\tan x)$ basta osservare che è una funzione limitata (i suoi valori sono compresi tra -1 e 1), quindi sommata al primo addendo che diverge positivamente non costituisce indeterminazione. In conclusione

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty.$$

Vediamo ora il limite nell'estremo destro. Seguendo il metodo precedente otteniamo:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \log(\cos x) = \lim_{t\to 0^+} \log t = -\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} e^{\tan x \log(\cos x)} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0.$$

Per quanto riguarda invece la funzione $\cos(\tan x)$ proviamo che non esiste il limite per $x \to \frac{\pi}{2}^-$. Infatti, consideriamo la successione di numeri $x_n = \arctan(n\pi)$. Si ottiene facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}^-$$

e che

$$\cos(\tan x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

e la successione $(-1)^n$ non ha limite, quindi la non esistenza del limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(\tan x)$ è provata. La funzione f è quindi somma di una funzione infinitesima e di una che non ha limite per $x \to \frac{\pi}{2}^-$ pertanto non ha limite.

In conclusione la f presenta un solo asintoto verticale di equazione $x = -\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 3 Determinare per quali valori del parametro reale α il seguente integrale generalizzato risulta finito

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{2x - x^2}}{(\sin x)^\alpha}\, dx.$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda è positiva nell'intervallo $(0, 1)$ dato che

$$2x - x^2 = x(2 - x) > 0 \text{ se } 0 < x < 2.$$

Ne segue che possiamo applicare il criterio del confronto asintotico confrontandola con un'altra opportuna funzione positiva. Se $\alpha \leq 0$ la funzione è continua in $[0, 1]$ quindi l'integrale è sicuramente finito (non è un integrale generalizzato genuino, bensì un integrale di Riemann). Nel caso $\alpha > 0$ invece il denominatore si annulla e potrebbe esserci un asintoto verticale per $x = 0$. In tutti gli altri punti dell'intervallo $(0, 1]$ la funzione è continua. Limiteremo quindi la nostra analisi al punto $x = 0$. Per $x \to 0$ risulta che $\sin x \sim x$ e che $\sqrt[3]{2x - x^2} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{2 - x} \sim \sqrt[3]{x}$. Quindi

$$\frac{\sqrt[3]{2x - x^2}}{(\sin x)^\alpha} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha - \frac{1}{3}}}$$

e l'ultima funzione ha integrale finito in $(0, 1)$ se e solo se $\alpha - \frac{1}{3} < 1$ cioè se $\alpha < \frac{4}{3}$.