Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 2 febbraio 2010

Domanda 1 Sia (a_n) una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Allora, necessariamente

A) non esiste $\lim_{n\to\infty} \sin a_n$ B) se (a_n) è strettamente crescente allora esiste $\lim_{n\to\infty} \sin a_n$

C) $\lim_{n\to\infty} a_n \sin a_n = +\infty$ D) $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) = 1$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 2 La successione $a_n = \dfrac{n^5 \cos(n\pi) \sin \frac{1}{n^2}}{5n^2+2n}$, definita per $n \geq 1$

A) è limitata ma non ha limite B) non è limitata e non ha limite

C) ha limite finito D) tende a $+\infty$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 3 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione concava, derivabile con $f'(0) < 0$ e $f(0) = 0$. Allora, necessariamente

A) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x < 0$ B) $f(x) \geq 0$ per ogni $x < 0$

C) $f(x) < 0$ per ogni $x > 0$ D) f è limitata superiormente in $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 4 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -\sqrt{|x|}$

A) è convessa in $\mathbb{R}$ B) è concava in un intorno di 0

C) non è né concava né convessa in $\mathbb{R}$ D) ha un flesso per $x = 0$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 5

$$\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)$$

A) vale 1 B) non esiste

C) vale 0 D) vale $+\infty$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 6

$$\int_0^1 e^x(2x+1)\,dx =$$

A) e B) $5e-3$

C) $5e$ D) $e+1$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 7

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{x(1+x)^2}\,dx$$

A) non esiste B) vale $-\infty$

C) vale $+\infty$ D) esiste finito

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 8 Sia $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che $f(x) > 0$ per ogni x e $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\sin x = 1$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ B) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$

C) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ esiste finito D) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ non esiste.

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cos\left((2n+1)\pi\right)}{n}$

A) converge assolutamente B) diverge negativamente

C) è indeterminata D) converge semplicemente ma non assolutamente

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$

A) diverge positivamente B) è infinitesima

C) converge D) è indeterminata

$\boxed{\text{C}}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 2 febbraio 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n^4}}-1\right)}$$

Soluzione

Valutiamo il denominatore del termine generale. Ricordiamo che per $t \to 0$ si ha che

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$$

quindi, con la sostituzione $t = \dfrac{5}{n^4}$ si ottiene

$$n^2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n^4}}-1\right) = n^2\left(1+\frac{5}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)-1\right) = \frac{5}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0^+$$

quando $n \to \infty$. Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n^4}}-1\right)} = +\infty$$

e la serie diverge positivamente.

Esercizio 2 Data la funzione $f(x) = \dfrac{\log(2+x)}{3x^3+2x^2-1}$ si determini la presenza di eventuali asintoti.

Soluzione

Il numeratore della funzione è definito per $x > -2$ e tende a $-\infty$ per $x \to -2^+$. Il denominatore per $x = -2$ vale -17, quindi

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty.$$

Cerchiamo ora le eventuali radici del denominatore. Poniamo $g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$ e osserviamo che

$$g'(x) = 9x^2 + 4x = x(9x+4)$$

quindi $g'(x) > 0$ per $x < -\frac{4}{9}$ e per $x > 0$ mentre $g'(x) < 0$ se $-\frac{4}{9} < x < 0$. Ne segue che $x = -\frac{4}{9}$ è punto di massimo locale per g mentre $x = 0$ è punto di minimo locale. Dato che $g(-\frac{4}{9}) = -\frac{32}{81} - 1 < 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ segue che esiste un'unica radice x_1 di g e che $x_1 > 0$ (g è decrescente nell'intervallo $(-\frac{4}{9}, 0)$). Dato che $x_1 > 0$ e che la funzione $\log(2+x)$ è crescente si ottiene subito che $\log(2 + x_1) > \log 2 > 0$. Invece $g(x) < 0$ se $x < x_1$ e $g(x) > 0$ se $x > x_1$. Da queste considerazioni segue che

$$\lim_{x\to x_1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_1^+} f(x) = +\infty.$$

Infine, applicando il teorema di de L'Hopital si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

In conclusione la f ha due asintoti verticali, uno di equazione $x = -2$ e l'altro di equazione $x = x_1$ e l'asintoto orizzontale $y = 0$.

Esercizio 3 Determinare l'insieme delle primitive della funzione $f(x) = -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)$.

Soluzione

Osserviamo che $-3\cos^2(3x)\sin^3(3x) = -3\cos^2(3x)\,(1 - \cos^2(3x))\sin(3x)$, quindi con la sostituzione $\cos(3x) = t$, $-3\sin(3x)\,dx = dt$ si ottiene

$$\int -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)\,dx = \left(\int t^2(1-t^2)\,dt\right)_{t=\cos(3x)} = \left(\int t^2 - t^4\,dt\right)_{t=\cos(3x)}$$
$$= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)_{t=\cos(3x)} + c = \frac{\cos^3(3x)}{3} - \frac{\cos^5(3x)}{5} + c$$

con c costante arbitraria.