Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 15 gennaio 2010

Domanda 1 Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali tali che $|a_n| \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, necessariamente

A) se (b_n) converge allora anche (a_n) converge B) se (b_n) diverge allora anche (a_n) diverge

C) se (b_n) converge allora (a_n) è limitata D) se (a_n) non converge allora (b_n) non converge

C

Domanda 2 La successione $a_n = \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)(1-n^2)e^n$

A) tende a $-\infty$ B) non ha limite

C) è limitata inferiormente D) non è limitata superiormente

B

Domanda 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^4+\sqrt{x}+2x^3)e^x}{(e^{2x}+1)(3x^4+x^2+1)} =$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$

C) 0 D) $+\infty$

C

Domanda 4 Sia $f(x) = \log\left[(\log x)^x\right]$ definita sulla semiretta $(1, +\infty)$. Allora

A) f è debolmente decrescente B) $f(x) > 0$ per ogni $x > 1$

C) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ D) f non è limitata né superiormente né inferiormente

D

Domanda 5 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente positiva e derivabile 2 volte. Se x_0 è un punto di massimo assoluto per f allora, necessariamente

A) $f''(x_0) < 0$ B) f è strettamente concava in un intorno di x_0

C) $\log\left(\frac{f(x_0)}{f(x)}\right) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

D) f è debolmente decrescente in $(x_0, +\infty)$ e debolmente crescente in $(-\infty, x_0)$

C

Domanda 6 La serie $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n^4 - n^2 + n}\,\big(2 + \cos(n^2)\big) \sin \frac{1}{n^3}$

A) è indeterminata   B) converge

C) diverge positivamente   D) diverge negativamente

C

Domanda 7 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(1) = 0$ e sia $G(x) = \int_0^{e^x} f(t)\,dt$. Allora, necessariamente

A) G è debolmente crescente in $\mathbb{R}$ B) 0 è un punto di minimo locale per G

C) $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ D) $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$

C

Domanda 8 L'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}\,dx$

A) vale 0   B) vale $+\infty$

C) non esiste   D) vale $\frac{\pi^2}{4}$

C

Domanda 9 La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)\cos n}{n\sqrt{n}}$

A) converge semplicemente ma non assolutamente   B) converge assolutamente

C) diverge   D) è indeterminata

B

Domanda 10 $\int_0^{\pi/6} \tan(2x)\,dx =$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{\log 2}{2}$ D) $\frac{1}{2}$

C

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 15 gennaio 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{3}{\sqrt{n}} - \sin\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2$.

Soluzione

La serie è a termini positivi, possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione seno in 0:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

e ponendo $t = \dfrac{3}{\sqrt{n}}$ (per $n \to \infty$ si ha che $t \to 0$) otteniamo che

$$n\left(\frac{3}{\sqrt{n}} - \sin\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2 = n\left(\frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6}\frac{27}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)^2 =$$
$$n\left(\frac{9}{2}\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)^2 = n\left(\frac{81}{4}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{81}{4}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Quindi la serie data converge perché è asintotica alla serie armonica di esponente 2.

Esercizio 2 Determinare l'insieme di esistenza e gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^{7/2}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 \log\left((x-1)^2\right)}{(x^2-4)^{5/2}} + 3x.$$

Soluzione

Osserviamo che $\sqrt{x-2}$ è definita per $x \geq 2$, $\log\left((x-1)^2\right)$ per $x \neq 1$, $x^{7/2}$ per $x > 0$ e il denominatore è definito e non nullo per $x < -2$ oppure per $x > 2$. Intersecando i vari domini otteniamo che la f è definita per $x > 2$. L'unico asintoto verticale potrebbe essere per $x = 2$, quindi calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 2^+} f(x).$$

Fattorizziamo il denominatore come $(x-2)^{5/2}(x+2)^{5/2}$ e osserviamo che $\log\left((x-1)^2\right) = 2\log(x-1) = 2\log\left(1+(x-2)\right)$. Ricordiamo ora che $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$ ed effettuiamo la sostituzione $t = x-2$ notando che per $x \to 2^+$ si ha $t \to 0^+$. Quindi

$$\log\left((x-1)^2\right) = 2\left((x-2) + o(x-2)\right) \qquad \text{per } x \to 2.$$

Ne segue che

$$f(x) = \frac{2x^{7/2}(x-2)^{3/2}\left((x-2)+o(x-2)\right)}{(x-2)^{5/2}(x+2)^{5/2}} + 3x = \frac{2x^{7/2}\left(1+o(1)\right)}{(x+2)^{5/2}} + 3x \to \frac{2\cdot 2^{7/2}}{4^{5/2}} + 6 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 6$$

quindi non c'è nessun asintoto verticale.
Controlliamo ora l'eventuale asintoto orizzontale osservando che per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{x^{3/2}x^{7/2}\log(x-1)}{x^5} + 3x = \log(x-1) + 3x \to +\infty.$$

Ne segue che anche l'asintoto orizzontale non è presente. Potrebbe esistere l'asintoto obliquo. Dal calcolo appena eseguito si ottiene che per $x \to +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} \sim \frac{\log(x-1)}{x} + 3 \to 3$$

quindi il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo dovrebbe essere 3. Cerchiamo ora il termine noto. Per $x \to \infty$

$$f(x) - 3x = \frac{x^{7/2}\left(\sqrt{x-2}\right)^3 \log\left((x-1)^2\right)}{(x^2-4)^{5/2}} \sim \log(x-1) \to \infty$$

quindi non ci sono neanche asintoti obliqui.

Esercizio 3 Determinare per quali valori del parametro reale α risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{(\sin x)^\alpha}\, dx$$

e, per tali valori, calcolare l'integrale.

Soluzione

La funzione integranda è continua in $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, quindi il problema dell'integrabilità si pone eventualmente solo in un intorno del punto $x = 0$. Per $x \to 0^+$ risulta

$$\frac{\cos x}{(\sin x)^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

quindi, essendo l'integranda positiva, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale è convergente per $\alpha < 1$. In tale caso fissiamo $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ e calcoliamo l'integrale sull'intervallo $\left[\varepsilon, \frac{\pi}{6}\right]$ usando la sostituzione $\sin x = t$

$$\int_\varepsilon^{\pi/6} \frac{\cos x}{(\sin x)^\alpha}\, dx = \int_{\sin\varepsilon}^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[t^{1-\alpha}\right]_{\sin\varepsilon}^{1/2} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} - (\sin\varepsilon)^{1-\alpha}\right).$$

Per ottenere il valore dell'integrale basta ora calcolare il limite per $\varepsilon \to 0^+$, quindi, dato che $\alpha < 1$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{(\sin x)^\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\pi/6} \frac{\cos x}{(\sin x)^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}.$$