Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 21 settembre 2009

Domanda 1 La funzione $f(x) = \arctan \dfrac{-1}{x^2+1}$

A) è debolmente crescente in $\mathbb{R}$ B) è debolmente decrescente in $\mathbb{R}$

C) ha un punto di minimo assoluto per $x = 0$ D) ha un asintoto obliquo

C

Domanda 2 La funzione $f(x) = e^{2x}(5 - 2x)$

A) è limitata superiormente   B) è limitata inferiormente

C) ha un asintoto verticale   D) è convessa in $\mathbb{R}$

A

Domanda 3 La successione $a_n = \left(\sin \sqrt[4]{|\sin n|}\right)^{4n}$

A) non ha limite   B) tende a 1   C) tende a 0   D) diverge a $+\infty$

C

Domanda 4 La successione $a_n = n \arctan \dfrac{(-1)^n}{n}$

A) tende a 0   B) non ha limite   C) tende a 1   D) diverge a $+\infty$

B

Domanda 5 La funzione $F(x) = \begin{cases} 2 + \int_0^x t \cos t \, dt & \text{se } x > -\pi \\ \pi(x + \pi) & \text{se } x \leq -\pi \end{cases}$

A) non è continua in $\mathbb{R}$ B) è continua ma non derivabile in $\mathbb{R}$

C) è derivabile in $\mathbb{R}$ D) è derivabile in $\mathbb{R}$ ma non è continua in $(-\infty, -\pi)$

C

Domanda 6 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione continua con $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan f(x)}{x}\, dx$ esiste finito B) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log f(x)}{x}\, dx = +\infty$

C) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin f(x)}{\sqrt{x}}\, dx$ esiste finito D) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-f(x)}}{x}\, dx$ esiste finito

C

Domanda 7 La serie $\displaystyle\sum_n \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) e^{-3n} \log^3 n}{2n+1}$

A) diverge a $-\infty$ B) converge semplicemente ma non assolutamente

C) converge assolutamente D) è indeterminata

C

Domanda 8 Sia (a_n) una successione tale che $a_n > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n}$ converge B) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n \log n}$ converge

C) $\displaystyle\sum_n \frac{\log a_n}{n \log^2 n}$ diverge positivamente D) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n \log a_n}$ diverge positivamente

C

Domanda 9 Il limite $\displaystyle\lim_{x \to 4^-} (4-x)^{1-\cos(x-4)}$

A) non esiste B) vale 0 C) vale $+\infty$ D) vale 1

D

Domanda 10 L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^{3\alpha}(1+x^3)}\, dx$ esiste finito se e solo se

A) $\alpha < 1$ B) $\alpha > 3$ C) $\alpha < \frac{3}{2}$ D) $\alpha > \frac{2}{3}$

A

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 21 settembre 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x^3}{3x^2} & \text{se } x < 0 \\ -4(x-2)^2 + x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ determinandone insiemi di continuità, derivabilità, monotonia, asintoti, convessità, punti di massimo e minimo locale, massimo e minimo assoluti o estremi superiore e inferiore.

Soluzione

Osserviamo subito che per $x < 0$ la funzione vale $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$ il cui grafico è una retta, mentre per $x \geq 0$ è un polinomio di secondo grado. Pertanto la f è sicuramente derivabile (quindi continua) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nel punto $x = 0$ risulta

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{3} \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = -16$$

quindi la funzione non è continua e pertanto neanche derivabile in $x = 0$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

quindi la funzione non è limitata né inferiormente né superiormente, pertanto non ha né minimo né massimo assoluti.

La f presenta banalmente l'asintoto obliquo $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ a $-\infty$ mentre non ha asintoto obliquo a $+\infty$ essendo un polinomio di secondo grado.

La funzione è ovviamente decrescente nella semiretta $(-\infty, 0)$. Risulta invece

$$f'(x) = -6x + 16 \quad \text{per } x \geq 0$$

quindi la funzione è crescente nell'intervallo $\left[0, \frac{8}{3}\right]$ e decrescente nella semiretta $\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$. Il punto $x = \frac{8}{3}$ è di massimo locale. Il punto $x = 0$ è invece di minimo locale dato che in un intorno sia destro che sinistro del punto la funzione assume valori maggiori di $f(0)$.

Per quanto riguarda la convessità, sulla semiretta $(-\infty, 0)$ il grafico della funzione è una retta, quindi è contemporaneamente debolmente concava e debolmente convessa. Invece sulla semiretta $[0, +\infty)$ è una parabola con coefficiente di secondo grado negativo, quindi è concava. Globalmente in $\mathbb{R}$ la funzione non è né concava né convessa.

Esercizio 2 Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie $\sum_n \frac{1+n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$.

Soluzione

Osserviamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ quindi

$$\frac{1+n\cos(n\pi)}{2n^2+1} = \frac{1}{2n^2+1} + (-1)^n \frac{n}{2n^2+1}.$$

Esaminiamo separatamente le due serie

$$\sum_n \frac{1}{2n^2+1}, \qquad \sum_n (-1)^n \frac{n}{2n^2+1}.$$

La prima è a termini positivi ed asintoticamente equivalente ad una serie armonica di ordine 2, quindi convergente (ovviamente anche assolutamente). La seconda è una serie a segni alterni ed è facile verificare che la successione $\frac{n}{2n^2+1}$ è decrescente e infinitesima. Infatti risulta che

$$\frac{n+1}{2(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{2n^2+1} \qquad \text{se } n \geq 2.$$

Ne segue che per il criterio di Leibniz anche questa seconda serie è convergente. Tuttavia in questo caso non abbiamo la convergenza assoluta poiché

$$\left|(-1)^n \frac{n}{2n^2+1}\right| = \frac{n}{2n^2+1} \sim \frac{1}{n}$$

e per il criterio del confronto asintotico la serie dei valori assoluti diverge positivamente. Ne segue che la serie complessiva converge semplicemente perché somma di due serie convergenti, mentre non converge assolutamente perché somma di una serie assolutamente convergente e di una assolutamente divergente (basta ricordare la disuguaglianza $|a_n + b_n| \geq |b_n| - |a_n|$).

Esercizio 3 Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(1-x^3)^\alpha}\, dx$$

esiste finito.

Soluzione

Osserviamo che se $0 < x < 1$ si ha che $\log x < 0$ e $1 - x^3 > 0$. La funzione integranda è quindi di segno negativo costante nell'intervallo di integrazione e possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Inoltre la funzione è continua in $(0,1)$ (il denominatore non si annulla), quindi le uniche possibili singolarità sono agli estremi dell'intervallo.
Per $x \to 0^+$ si ha che $\frac{\log x}{(1-x^3)^\alpha} \sim \log x$ per qualsiasi valore di α. La funzione $g(x) = \log x$ è integrabile in un intorno destro di 0, quindi per il criterio del confronto asintotico anche $\frac{\log x}{(1-x^3)^\alpha}$ lo è.

Per $x \to 1^-$ si ha che
$$(1-x^3)^\alpha = (1-x)^\alpha(1+x+x^2)^\alpha$$
quindi
$$\frac{\log x}{(1-x^3)^\alpha} \sim \frac{\log x}{(1-x)^\alpha}$$
Osserviamo ora che
$$\frac{\log x}{(1-x)^\alpha} = \frac{\log(1+(x-1))}{(1-x)^\alpha} \sim \frac{x-1}{(1-x)^\alpha} = \frac{-1}{(1-x)^{\alpha-1}}$$
e che quest'ultima funzione è integrabile in un intorno di 1 se e solo se $\alpha - 1 < 1$ cioè se $\alpha < 2$. Ne segue che l'integrale generalizzato cercato esiste finito se e solo se $\alpha < 2$.