Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 27 luglio 2009

Domanda 1 Sia $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, strettamente concava tale che $f(-1) = 3$ e $f(1) = -2$. Allora, necessariamente

A) f ha almeno un punto di massimo locale e due punti di minimo locale

B) f ha uno e un solo punto di massimo locale

C) f è debolmente decrescente D) esiste almeno un punto dove f' si annulla

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 2 La funzione $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$ è

A) concava B) debolmente crescente

C) ha un asintoto obliquo D) non ha punti di minimo locale

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 3 La successione $a_n = \dfrac{e^n - 2^{n\log n}}{n^n}$ definita per $n \geq 1$

A) tende a $-\infty$ B) tende a 0

C) tende a $+\infty$ D) non ha limite

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{1 - e^{(\frac{1}{n})^2}}{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}$

A) è limitata B) è limitata superiormente ma non inferiormente

C) è limitata inferiormente ma non superiormente

D) non è limitata né superiormente né inferiormente

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 5 Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^t(2t-t^2)}{\pi - 2\arctan t}\,dt$. Risulta che

A) $x = 0$ è punto di massimo locale per F B) $x = 0$ è punto di flesso per F

C) $x = 0$ è punto di minimo locale per F

D) F non ha né punti di massimo locale né punti di minimo locale

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 6 L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sqrt{\tan x}}\,dx$

A) esiste finito B) non esiste

C) diverge a $+\infty$ D) diverge a $-\infty$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 7 La funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x^2}+x-1}{x} & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x=0\\ \frac{2-2\cos x}{x} & \text{se } x<0\end{cases}$$

A) è derivabile in $x=0$ B) è derivabile a sinistra ma non a destra in $x=0$
C) è derivabile a destra ma non a sinistra in $x=0$

D) non è derivabile né a destra né a sinistra in $x=0$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 8 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n e^{-4n}\log^2 n}{n+1}$

A) converge semplicemente ma non assolutamente B) diverge a $+\infty$

C) è indeterminata D) converge assolutamente

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 9 Sia (a_n) una qualsiasi successione tale che $\sum_n a_n$ converga assolutamente. Allora, necessariamente

A) $\sum_n \sqrt{|a_n|}$ converge B) $\sum_n a_n^2$ converge

C) $\sum_n a_n^2$ diverge D) $\sum_n a_n \log n$ converge

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 10

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x^5)}\int_0^{x^2} t\sin(t^3)\,dt$$

A) vale 0 B) vale $+\infty$
C) è un numero reale appartenente all'intervallo $(0,1)$

D) è un numero reale maggiore o uguale a 1

$\boxed{\text{C}}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 27 luglio 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie

$$\sum_n \frac{n^{1-\alpha}}{\frac{1}{n^3} + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}} \, .$$

Soluzione

Ricordiamo che per $t \to 0$ si ha

$$\arctan t = t + o(t)$$

quindi

$$\frac{1}{n^3} + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{n^{5/2}} + 1 + o(1)\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

per $n \to \infty$. Ne segue che

$$\frac{n^{1-\alpha}}{\frac{1}{n^3} + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{\alpha - \frac{3}{2}}}.$$

Poiché la serie data è a termini positivi, dal criterio del confronto asintotico otteniamo la sua convergenza da quella della serie armonica generalizzata

$$\sum_n \frac{1}{n^{\alpha - \frac{3}{2}}}$$

che converge per $\alpha - \frac{3}{2} > 1$ cioè per $\alpha > \frac{5}{2}$.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x) = \frac{\log x - x^2}{x}$$

determinarne insieme di definizione, punti di massimo e di minimo locali, asintoti, estremi superiore e inferiore e insiemi di concavità e convessità.

Soluzione

La funzione è definita, a causa del logaritmo, solamente per $x > 0$, quindi l'insieme di definizione è $(0, +\infty)$. La funzione è derivabile, quindi continua, in tutto il suo insieme di definizione.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x - x^2}{x} = \frac{-\infty - 0}{0^+} = -\infty$$

quindi la funzione ha l'asintoto verticale $x = 0$. Come conseguenza immediata si ottiene anche che l'estremo inferiore di f è $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x - x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} - x = 0 - \infty = -\infty$$

quindi non vi è asintoto orizzontale.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2} - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

quindi la f ha l'asintoto obliquo di equazione $y = -x$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - 2x\right) x - (\log x - x^2)}{x^2} = \frac{1 - \log x - x^2}{x^2}$$

ne segue che $f'(x) > 0$ se e solo se

$$1 - x^2 - \log x > 0.$$

Per risolvere questa disequazione osserviamo che per $x = 1$ si ottiene $1 - x^2 - \log x = 0$ e che la funzione $1 - x^2 - \log x$ è strettamente decrescente (la sua derivata vale $-2x - \frac{1}{x}$ che è sempre negativa nell'insieme di definizione di f), quindi $f'(1) = 0$ e $f'(x) > 0$ se $x \in (0, 1)$ mentre $f'(x) < 0$ se $x > 1$. La funzione è quindi crescente in $(0, 1]$ e decrescente in $[1, +\infty)$ e di conseguenza $x = 1$ è un punto di massimo assoluto (quindi anche locale) e non ci sono altri punti di massimo o minimo locale. Il massimo della funzione (quindi anche il suo estremo superiore) è $f(1) = -1$.

$$f''(x) = \frac{(-\frac{1}{x} - 2x)x^2 - (1 - \log x - x^2)2x}{x^4} = -\frac{3 - 2\log x}{x^3}.$$

Si ha quindi che $f''(x) > 0$ se e solo se $3 - 2\log x < 0$ cioè $\log x > \frac{3}{2}$ ed essendo la funzione logaritmo crescente, se e solo se $x > e^{3/2}$. La f è quindi concava per $x \in (0, e^{3/2})$, convessa per $x > e^{3/2}$ ed ha un punto di flesso per $x = e^{3/2}$.

Esercizio 3 Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{|x^2 - 1|^\alpha}{|\log x|} \sinh x \, dx.$$

Soluzione

Osserviamo subito che la funzione data non è definita per $x = 0$ e per $x = 1$. Tuttavia si ha che

$$\lim_{x\to0^+} \frac{|x^2 - 1|^\alpha}{|\log x|} \sinh x = \frac{1}{-\infty} 0 = 0$$

perciò la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$ e quindi integrabile in un intorno di tale punto. Resta solo da esaminare il punto $x = 1$. Ricordiamo che $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, quindi $\sinh 1 = \frac{e^2-1}{2e} \neq 0$. Come conseguenza immediata abbiamo quindi che, per $x \to 1^-$

$$\frac{|x^2 - 1|^\alpha}{|\log x|} \sinh x \sim \frac{|x^2 - 1|^\alpha}{|\log x|}.$$

Osserviamo ora che

$$|x^2 - 1|^\alpha = |x+1|^\alpha |x-1|^\alpha \sim |x-1|^\alpha.$$

Inoltre

$$\log x = \log(1 + (x-1)) = (x-1) + o(x-1)$$

ne segue che

$$\frac{|x^2-1|^\alpha}{|\log x|} \sim \frac{|x-1|^\alpha}{|x-1| + o(|x-1|)} \sim \frac{1}{|x-1|^{1-\alpha}}$$

Essendo la funzione integranda positiva, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico ottenendo la sua integrabilità se e solo se

$$1 - \alpha < 1 \quad \Longleftrightarrow \alpha > 0.$$