Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 19 giugno 2009

Domanda 1 Data la successione $a_n = \dfrac{(\log n)^{2n}}{n^{n/2}}$ definita per $n \geq 1$, risulta che

A) (a_n) è debolmente crescente B) esiste il massimo di (a_n)

C) non esiste il limite di (a_n) D) (a_n) non è limitata inferiormente

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 2 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(\log n)^2}$

A) diverge B) converge assolutamente

C) converge semplicemente ma non assolutamente D) è indeterminata

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 3 Date due successioni di numeri reali (a_n) e (b_n) tali che $a_n + b_n = \dfrac{1}{n^2}$ per ogni $n \geq 1$, risulta necessariamente che

A) $\displaystyle\sum_n a_n$ e $\displaystyle\sum_n b_n$ convergono entrambe B) $\displaystyle\sum_n a_n$ e $\displaystyle\sum_n b_n$ divergono entrambe

C) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1 - e^{a_n + b_n}}{\sqrt{n}}$ converge D) $\displaystyle\sum_n (a_n - b_n)$ converge

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 4 Data la successione $a_n = \left(1 + \sin\dfrac{1}{n^4}\right)^{n^4}$ risulta che

A) non esiste il limite di (a_n) B) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

C) (a_n) è limitata superiormente D) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 5 Sia $f(x) = \dfrac{\log(1 + 3\sqrt[3]{x})}{x + 2x^4 + x^2}$ definita per ogni $x > 0$. Risulta che

A) f è limitata superiormente B) f è crescente

C) f non è limitata inferiormente D) f non ha massimo

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 6 Si consideri la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\arctan\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

A) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ B) f non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, 0]$

C) f è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty)$

D) f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, +\infty)$.

B

Domanda 7 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ necessariamente si ha che

A) $F(x) = \int\limits_0^x f^2(t)\,dt$ è debolmente decrescente B) $F(x) = \int\limits_{\sin x}^{e^{x^2}} f(t)\,dt \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$

C) $F(x) = \int\limits_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ è limitata inferiormente per $x > 1$

D) $F(x) = \int\limits_0^{x^2} f(t)\,dt$ è debolmente decrescente

B

Domanda 8 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente convessa e strettamente positiva. Allora, necessariamente

A) f ha minimo B) f ha massimo

C) f è debolmente crescente D) f non ha massimo

D

Domanda 9 La funzione $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$

A) è iniettiva B) è debolmente crescente

C) ha due punti di massimo locale D) è derivabile

C

Domanda 10 Sia $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione tale che $g(x) = \sqrt{|x|}f(x)$ sia continua e $\min\{g(x) : x \in [-1, 1]\} > 0$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = +\infty$ B) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ esiste finito

C) $\displaystyle\int_{-1}^1 |f(x)|\,dx = +\infty$ D) $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx = -\infty$

B

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Analisi Matematica I

Pisa, 19 giugno 2009

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| |_|_|_|_|_|_|
(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Sia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(x+1)}{x^2+x} & \text{se } x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \\ \dfrac{x^2+1}{(x-3)^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Determinare gli insiemi di definizione, continuità e derivabilità, gli asintoti, i massimi e minimi relativi e assoluti, estremo superiore e inferiore di f.

Soluzione

Osserviamo che se $x > 0$ allora $x + 1 > 0$ e $x^2 + x \neq 0$. Inoltre se $x < 0$ allora $x - 3 \neq 0$. Quindi la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$. La funzione è sicuramente continua e derivabile nelle semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, in quanto quoziente e composizione di funzioni derivabili. Nel punto $x = 0$ risulta che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+o(x)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+o(1)}{(x+1)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{(x-3)^2} = \frac{1}{9}$$

quindi la funzione non è continua in $x = 0$ (e di conseguenza neanche derivabile).
Per quanto visto sui limiti in $x = 0$ si ottiene subito che la f non ha asintoti verticali. Valutiamo i limiti all'infinito.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+1)}{x^2+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x+1} = 0$$

avendo applicato il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{(x-3)^2} = 1.$$

Abbiamo quindi l'asintoto orizzontale $y = 0$ a $+\infty$ e quello $y = 1$ a $-\infty$. Ovviamente non ci sono asintoti obliqui. Valutiamo ora la derivata per $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(x^2+x) - \log(x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{x - \log(x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}.$$

Il segno di f' è determinato solamente da quello del suo numeratore. Poniamo quindi

$$g(x) = x - \log(x+1)(2x+1)$$

e studiamone il segno. Osserviamo che $g(0) = 0$ e che $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ che suggerisce $g(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Per ottenere questo risultato deriviamo la g

$$g'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x+1} - 2\log(x+1).$$

Ora basta osservare che se $x > 0$ si ha $\dfrac{2x+1}{x+1} > 1$ e $\log(x+1) > 0$, quindi $g'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Questo, unito al fatto che $g(0) = 0$, dimostra che $g(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Allora $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$ e la f è decrescente su tutta la semiretta $(0, +\infty)$. Valutiamo ora la derivata per $x < 0$

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - 2(x^2+1)(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{-2(x-3)(3x+1)}{(x-3)^4}.$$

Ne segue che $f'(x) > 0$ se e solo se $(x-3)(3x+1) < 0$ cioè se e solo se $-\dfrac{1}{3} < x < 3$, quindi, visto che stiamo considerando il caso $x < 0$, abbiamo che

$$f'(x) < 0 \text{ se } x < -\frac{1}{3}, \qquad f'(x) > 0 \text{ se } -\frac{1}{3} < x < 0, \quad f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Il punto $x = -\dfrac{1}{3}$ è di minimo locale e $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{32}$. Mettendo insieme i risultati si ottiene che

$$\inf f = 0, \qquad \sup f = 1$$

ma f non ammette né massimo né minimo assoluti.

Esercizio 2 Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite della successione

$$a_n = \log(n^\alpha) + \frac{1}{n^{\alpha+1}}\ .$$

Soluzione

Se $\alpha > 0$ allora $n^\alpha \to +\infty$, quindi $\log(n^\alpha) \to \infty$. Se $\alpha = 0$ allora $n^\alpha = 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi $\log(n^\alpha) = 0$ per ogni $n \geq 1$. Se $\alpha < 0$ allora $n^\alpha \to 0^+$, quindi $\log(n^\alpha) \to -\infty$.
Se $\alpha > -1$ allora $n^{\alpha+1} \to +\infty$ quindi $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \to 0$. Se $\alpha = -1$ allora $\frac{1}{n^{\alpha+1}} = 1$ per ogni $n \geq 1$. Se $\alpha < -1$ allora $n^{\alpha+1} \to 0^+$ quindi $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \to +\infty$. Mettendo insieme i risultati otteniamo che

- se $-1 \leq \alpha < 0$ allora $\lim\limits_n a_n = -\infty$
- se $\alpha = 0$ allora $\lim\limits_n a_n = 0$
- se $\alpha > 0$ allora $\lim\limits_n a_n = +\infty$.

Resta fuori solo il caso di indeterminazione per $\alpha < -1$. Osserviamo a questo punto che

$$a_n = \alpha \log n + n^{-1-\alpha} = n^{-1-\alpha}\left(1 + \frac{\alpha \log n}{n^{-1-\alpha}}\right)$$

e che per $\alpha < -1$ si ha $-1-\alpha > 0$ quindi $\lim_n \frac{\alpha \log n}{n^{-1-\alpha}} = 0$ e il limite cercato vale $+\infty$.

Esercizio 3 Determinare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1-\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{3n+\sin n}$.

Soluzione

Osserviamo che se n è pari allora $\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ mentre se n è dispari $\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1$. Quindi la serie si compone solo dei termini di indice pari. Poniamo allora $n = 2k$ e otteniamo che la serie data è uguale a

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{2k}\frac{1-\sin(2k\frac{\pi}{2})}{3\cdot 2k+\sin(2k)} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{6k+\sin(2k)}.$$

La serie è quindi a termini positivi, dato che $\sin(2k) \geq -1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Applichiamo quindi prima il criterio del confronto e poi quello del confronto asintotico ottenendo

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{6k+\sin(2k)} \geq \sum_{k\geq 1}\frac{1}{6k+1} \sim \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$$

e l'ultima serie trovata diverge positivamente. Ne segue che la serie data diverge positivamente. La convergenza assoluta è ovviamente identica a quella semplice essendo la serie a termini positivi.