Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 23 febbraio 2009

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora, necessariamente $\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx =$

A) $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ B) $(f(1) - f(0)) - \int_0^1 f'(x)\,dx$

C) $\dfrac{f^2(1) - f^2(0)}{2}$ D) $(f'(1) - f'(0)) - \int_0^1 f(x)\,dx$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 2 Sia $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora, necessariamente

A) $f(0) = \dfrac{f(2) - f(-2)}{4}$ B) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f^2(x) - f^2(1)}{x-1} = 2f(1)f'(1)$

C) esiste $x_0 \in (-2,2)$ tale che $f'(x_0) = 0$ D) $f(2)f(-2) < f(0)^2$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 3 Sia $F(x) = \int_{x^2+1}^{x^2} e^{t^2}\,dt$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

A) F è crescente in $\mathbb{R}$ B) F ha un punto di minimo locale per $x = 0$

C) F è limitata inferiormente D) $F(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 4 Sia $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1]$ e tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x)\sqrt{\sin x} = 2$. Allora

A) $\int_0^1 f(x) + 1\,dx$ diverge positivamente B) $\int_0^1 f(x)\,dx$ esiste finito

C) $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ esiste finito D) $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge positivamente

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 5 Sia $f(x) = \arctan(x^2+1)e^{\cos^2 x}$. Allora

A) $f'(x) = e^{\cos^2 x}\left(\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2} - \sin(2x)\arctan(x^2+1)\right)$

B) $f'(x) = \dfrac{2\cos x}{x^2+1}e^{2\sin x\cos x} + \arctan(x^2+1)e^{\cos^2 x}$

C) $f'(x) = e^{\cos^2 x}\arctan(x^2+1) + e^{\cos^2 x}\dfrac{2x+1}{\arctan(x^2+1)}$

A

D) $f'(x) = \frac{e^{\cos^2 x}}{(1+x^2)^2+1} + e^{2\sin x\cos x}\arctan(x^2+1)$

Domanda 6 Sia (a_n) una successione di numeri reali tale che $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = 3$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 9$ B) (a_n) è debolmente crescente

C

C) (a_n) è limitata inferiormente D) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Domanda 7 Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali tali che $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\sum_n a_n - b_n$ converge B) $\displaystyle\sum_n \frac{a_n}{b_n}$ diverge positivamente

B

C) $\displaystyle\sum_n a_n(b_n-1)$ converge D) $\displaystyle\sum_n a_n \log|b_n|$ non converge

Domanda 8 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\sin^2 x$. Allora

A) f ha infiniti punti di minimo locale B) $x = 0$ è un punto di minimo locale per f

A

C) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ D) f non è derivabile in $x = 0$

Domanda 9 La successione

$$a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)n^4$$

A

A) diverge a $-\infty$ B) tende a $\dfrac{1}{6}$ C) non ha limite D) tende a 0

Domanda 10 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)(n^4+3n)\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

A) converge assolutamente B) è indeterminata

C

C) diverge positivamente D) converge semplicemente ma non assolutamente

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 23 febbraio 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare il limite della successione $a_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1-\cos\frac{1}{n}}$.

Soluzione

Ricordiamo che per $t \to 0$ si ha:

$$\sin t = t + o(t), \qquad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

quindi, osservando che $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$, possiamo porre $t = \frac{1}{n}$ e ottenere

$$\begin{aligned}
\log a_n &= \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\log\left(\sin\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\log\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\log\left(\frac{1}{n}(1+o(1))\right) = \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)(-\log n)\log(1+o(1)) \\
&= -\frac{\log n}{2n^2} + o\left(\frac{\log n}{n^2}\right)o(1) \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato lo sviluppo di Taylor del logaritmo $\log(1+t) = t + o(t)$ con $t = o(1)$. Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$.

Esercizio 2 Studiare la funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2+1}}$ determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti, estremi superiore e inferiore, punti di massimo o di minimo locali e assoluti, insiemi di concavità e convessità e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione

Osserviamo prima di tutto che f è pari. La funzione è inoltre derivabile (e quindi continua) in tutto $\mathbb{R}$, dato che il denominatore dell'esponente non si annulla mai. Vediamo i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2+1}} = e^{\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

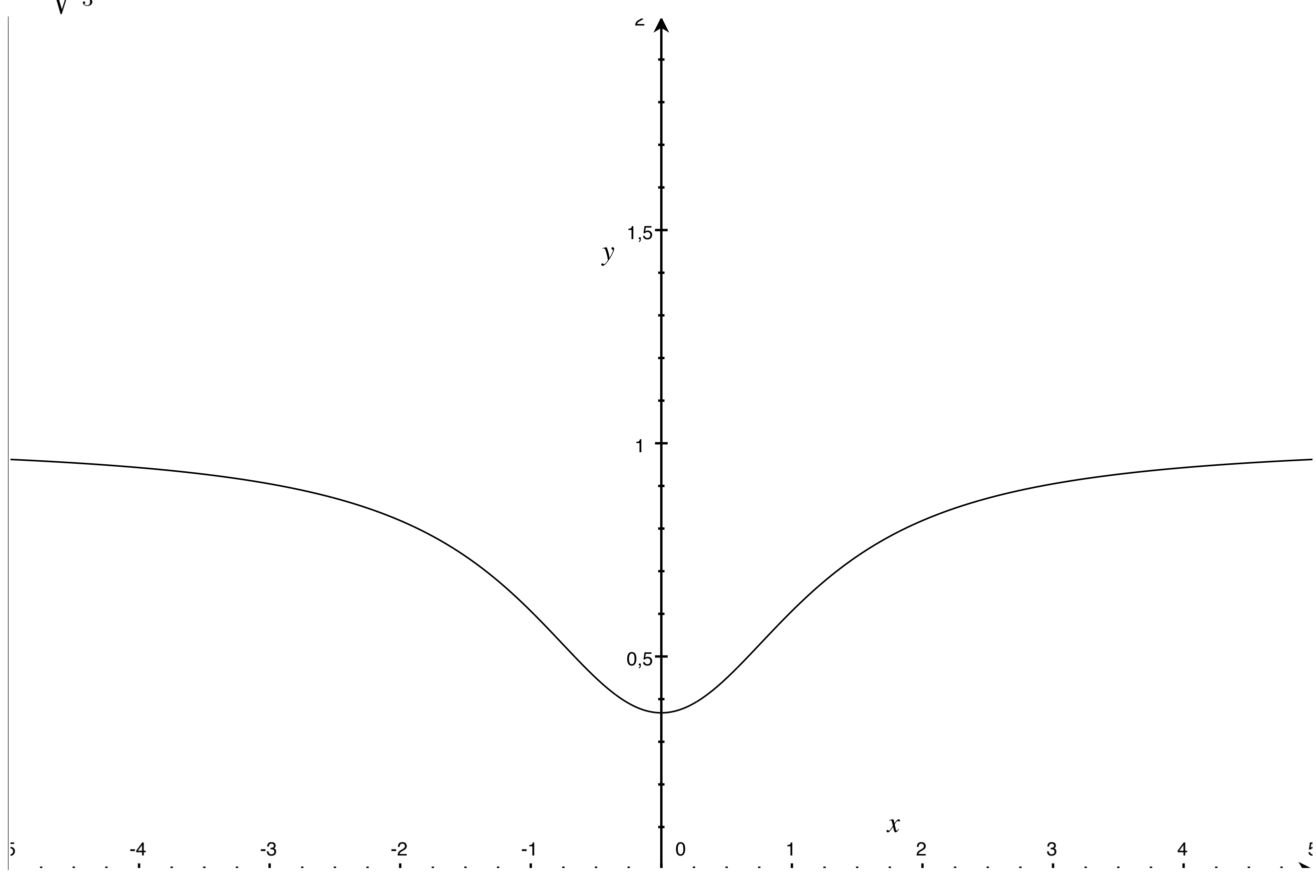
lo stesso dicasi per il limite a $-\infty$ data la parità di f. Abbiamo quindi l'asintoto orizzontale $y = 1$. Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2+1}} \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$ e $f'(0) = 0$. Ne segue che f è decrescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ e crescente su $(0, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è quindi di minimo assoluto e il minimo di f è $f(0) = \dfrac{1}{e}$. Non ci sono altri punti di massimo o minimo locali dato che la derivata si annulla solo in 0 e il dominio di f è un insieme aperto. La funzione non ammette massimo e $\sup f = 1$ dato che f è crescente in $(0, +\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Vediamo la convessità calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2+1}} \frac{2-6x^4}{(x^2+1)^4}$$

quindi il segno è determinato da quello di $2 - 6x^4$. Ne segue che $f''(x) > 0$ per $-\sqrt[4]{\frac{1}{3}} < x < \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, $f''(x) < 0$ per $x < -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ e per $x > \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ mentre si annulla per $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. La f è quindi convessa nell'intervallo $\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$ e concava in ciascuna delle semirette $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$ e $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$. I punti $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ sono di flesso.



Esercizio 3 Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\arctan(x^\alpha)$ risulta integrabile in senso generalizzato sulla semiretta $(0, +\infty)$.

Soluzione

Dobbiamo analizzare separatamente l'andamento di f in un intorno di 0 e di $+\infty$ dato che in un intorno del punto $x = 0$ la funzione potrebbe non essere limitata per qualche valore di α. Cominciamo con l'andamento a $+\infty$. Osserviamo che $|\arctan(x^\alpha)| < \frac{\pi}{2}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$. Quindi $|f(x)| < \frac{\pi}{2x^2}$ e, per il criterio del confronto, la f è assolutamente integrabile (quindi integrabile) in un intorno di $+\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrabilità sarà quindi determinata solo dal comportamento in 0. Ricordiamo che

$$\lim_{t \to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$$

quindi, se $\alpha > 0$ abbiamo che $x^\alpha \to 0$ per $x \to 0^+$ e di conseguenza

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{x^2} = \frac{1}{x^{2-\alpha}}$$

che è integrabile in 0 se e solo se $2-\alpha < 1$, quindi $\alpha > 1$. Per il criterio del confronto asintotico quindi anche f è integrabile se $\alpha > 1$. Se invece $\alpha = 0$ risulta $\arctan(x^\alpha) = \frac{\pi}{4}$ e se $\alpha < 0$ $\arctan(x^\alpha) \to \frac{\pi}{2}$ per $\alpha \to 0$, quindi in entrambi i casi $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to 0^+$ e per il criterio del confronto asintotico non è integrabile. Concludendo la f è integrabile sulla semiretta $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$.