Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 2 febbraio 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia $F(x) = \int_0^x \sin^3 t \cos^2 t\, dt$. Allora

A) $F(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ B) F ha un punto di minimo locale per $x = 0$

C) F è crescente in $\mathbb{R}$ D) F non è continua in $x = 0$

B

Domanda 2 Sia $A = \left\{ \frac{\sin(n+1)}{e^n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \right\}$. Allora

A) $\sup(A) > 1$ B) $\inf(A) = 0$ C) A non è limitato superiormente D) $\inf(A) < 0$

D

Domanda 3 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

A) f è crescente in $\mathbb{R}$ B) f è dispari C) $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$ D) f è limitata in $\mathbb{R}$

C

Domanda 4 Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Allora, necessariamente

A) $\sum_n (a_n - b_n)$ converge B) $\sum_n \left(\frac{a_n}{n^2} + \frac{b_n}{n} \right)$ diverge

C) $\sum_n \left(\frac{a_n}{n} \frac{b_n}{n} \right)$ converge D) $\sum_n (a_n^2 b_n)$ converge

C

Domanda 5 Sia $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin^2 x \cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

A) f ha integrale finito su $(0, 1]$ B) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

C) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = +\infty$ D) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\infty$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 6 Data la successione $a_n = (-1)^n \left(e^{\sin \frac{1}{n}} - 1\right) n \sin \dfrac{1}{n}$ si ha che

A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ B) non esiste $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

C) (a_n) è limitata superiormente D) (a_n) è monotona

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 7 Data una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ necessariamente si ha che

A) f ha almeno un punto di massimo locale

B) f ha un punto di minimo locale e uno di massimo locale C) $|f|$ ha massimo assoluto

D) f è iniettiva

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 8 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Definendo $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x^3} f(t)\,dt$, necessariamente risulta che

A) F è derivabile 2 volte in $\mathbb{R}$ B) F è debolmente decrescente in $\mathbb{R}$

C) F ha un punto di massimo locale per $x = 0$ D) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 9 La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n \log(n^2)}$

A) è indeterminata B) converge assolutamente

C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge negativamente

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 10 Il limite $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2 - 4x + 4)^2}{(e^{x^2-4} - 1)^4}$

A) non esiste B) è un numero reale diverso da 0 C) vale $+\infty$ D) vale 0

$\boxed{\text{B}}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 2 febbraio 2009

| | | | | | | | | | | | | | | |

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } x \geq 0 \\ |1+x|-1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti, punti di massimo o minimo locale, massimo e minimo assoluti o estremi superiore e inferiore.

Soluzione

La funzione è definita su tutta la retta reale dato che l'argomento del logaritmo è sempre strettamente positivo. Osserviamo ora che la funzione è sicuramente continua per $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} |1+x|-1 = 0 = \lim_{x\to 0^+} \log(1+x) = \log(1+0) = f(0)$$

quindi f è continua anche in $x=0$.
La funzione è sicuramente derivabile per $x > 0$ in quanto composizione di funzioni derivabili. Osserviamo ora che $1+x>0$ se e solo se $x>-1$, quindi

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 < x < 0 \\ -x-2 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

quindi, utilizzando il teorema di de l'Hôpital abbiamo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1, \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

da cui segue la derivabilità di f in $x=0$. Inoltre, se $x<0$ e $x \neq -1$ la f è derivabile perché è composizione di funzioni derivabili. Per $x=-1$ f non è derivabile perché $f'_-(-1) = -1$ mentre $f'_+(-1) = 1$. L'insieme di derivabilità di f è quindi $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Per quanto riguarda il segno della derivata abbiamo che:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

quindi f è monotona crescente nella semiretta $[-1,+\infty)$ e monotona decrescente nella semiretta $(-\infty,-1]$. Da questo otteniamo subito che $x=-1$ è un punto di minimo assoluto e quindi anche locale. Non ci sono punti di massimo locale (quindi neanche assoluti) in quanto in tutti i punti

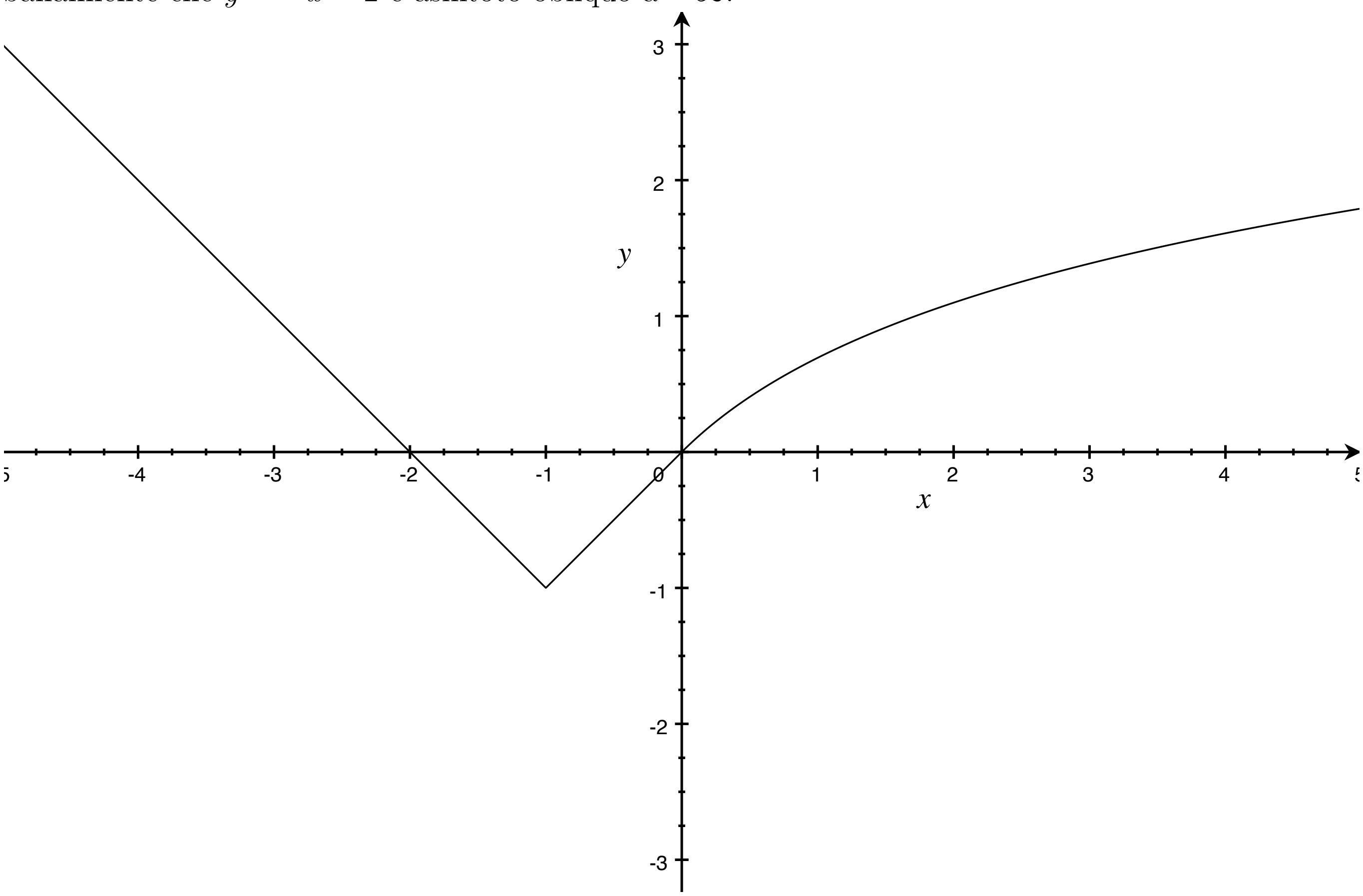
$x \neq -1$ risulta $f'(x) \neq 0$. Il minimo assoluto della funzione è $f(-1) = -1$. Per quanto riguarda l'estremo superiore basta osservare che $\lim_{x\to+\infty} \log(1+x) = +\infty$, quindi $\sup(f) = +\infty$.
f non ha asintoti verticali perché è continua su tutto $\mathbb{R}$. Dal fatto che anche

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x - 2 = +\infty$$

otteniamo subito che f non ha asintoti orizzontali. Verifichiamo quelli obliqui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 0$$

quindi non c'è asintoto obliquo a $+\infty$. Invece, essendo $f(x) = -x - 2$ per $x \leq -1$ si ottiene banalmente che $y = -x - 2$ è asintoto obliquo a $-\infty$.



Esercizio 2 Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \dfrac{x^{5-\alpha}(1-x)^{2\alpha}}{\sin x}$ è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $(0, 1)$.

Soluzione

Osserviamo che la f è continua e positiva in tutto l'intervallo di integrazione ma potrebbe non essere limitata negli intorni degli estremi dell'intervallo per alcuni valori di α. Infatti, per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{x^{5-\alpha}}{\sin x} \sim \frac{x^{5-\alpha}}{x} = \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

che, per il criterio del confronto asintotico, è integrabile se e solo se $\alpha - 4 < 1$ quindi $\alpha < 5$. Per $x \to 1^-$ invece

$$f(x) \sim (1-x)^{2\alpha} = \frac{1}{(1-x)^{-2\alpha}}$$

che è integrabile se e solo se $-2\alpha < 1$ quindi $\alpha > -\frac{1}{2}$. In definitiva la f è integrabile in senso generalizzato su $(0,1)$ se e solo se $-\frac{1}{2}\alpha < 5$.

Esercizio 3 Dire se la serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}{\sqrt{n}}$$

converge.

Soluzione

Osserviamo che la serie è a termini positivi essendo $\sqrt{1-\frac{4}{n^2}} \leq 1 \; \forall n \geq 2$. Inoltre:

$$\frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}{\sqrt{n}} = \frac{1-(1-\frac{4}{n^2})}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}\,n^2} = \frac{1}{n^{5/2}}$$

la serie quindi converge per il criterio del confronto asintotico essendo $\frac{5}{2} > 1$.