Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 14 gennaio 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(1) = 5$. Allora

A) $\lim_{x \to -1} f\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\right) = 5$ B) f è limitata in un intorno di 1

C) $\lim_{x \to 1} \cos\left(f(x)\right) = \cos 5$ D) $\sqrt{f(\sin\frac{\pi}{2})} < 3$

D

Domanda 2 Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^4 + \sqrt{x} + 2x^3}{e^x + 1}$. Allora f

A) ha un asintoto verticale B) è concava C) è limitata D) è debolmente crescente

C

Domanda 3

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n! + 3}{n!}\right)^{-n!}$$

A) vale $+\infty$ B) non esiste C) vale $\dfrac{1}{e^3}$ D) vale 0

C

Domanda 4 La successione $a_n = \left(5n - \dfrac{1}{n^2}\right) \log\left(1 - \dfrac{4}{n}\right)$ con $n \geq 5$

A) non ha segno costante B) diverge a $-\infty$

C) è limitata inferiormente D) è infinitesima

C

Domanda 5 Sia $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{0} (e^{2t} + 1)e^{-t}\, dt$. Allora

A) $G'(x) = e^x + e^{-x}$ B) G è crescente in $\mathbb{R}$

C) $x = 0$ è punto di massimo locale per G D) G è inferiormente limitata in $\mathbb{R}$

C

Domanda 6 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e diversa da 0. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ esiste finito B) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{|t|}} = +\infty$

C) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + f^2(t))\, dt = +\infty$ D) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\, dt < 0$

C

Domanda 7 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ è

A) non limitata B) di classe C^2

C) non derivabile D) prolungabile per continuità in $x = 0$

B

Domanda 8 La serie $\displaystyle\sum_{n \geq 1} n^2 \cos(n\pi) e^{-3n} \log(2n)$

A) è indeterminata B) converge assolutamente

C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge positivamente

B

Domanda 9 Sia (a_n) una successione tale che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge B) $\displaystyle\sum_n \sqrt{|a_n|}$ converge

C) $\displaystyle\sum_n a_n^2$ converge D) $\displaystyle\sum_n \frac{a_n^3}{n\sqrt{n}}$ converge assolutamente

D

Domanda 10 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \cosh t\, dt$

A) è debolmente crescente in $\mathbb{R}$ B) è limitata inferiormente

C) ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ D) è concava

B

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 14 gennaio 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x} + 2 & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

determinandone la continuità, la derivabilità, gli eventuali punti di massimo o minimo assoluti e relativi, estremi inferiore e superiore e gli eventuali asintoti.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in ogni punto $x \neq 0$ perché è somma, prodotto e composizione di funzioni derivabili. Inoltre

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 3x + o(x) - 1}{x} + 2 = 5 = f(0)$$

quindi f è continua anche in 0. Se $x \neq 0$ risulta

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}x - (e^{3x}-1)}{x^2} = \frac{e^{3x}(3x-1)+1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right)(3x-1)+1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{9x^2 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

Quindi f è derivabile anche in 0 e $f'(0) = \frac{9}{2}$. Studiamo ora il segno della derivata per $x \neq 0$. Basterà considerare il numeratore, essendo il denominatore sempre positivo. Poniamo

$$g(x) = e^{3x}(3x-1)+1$$

e osserviamo che $g'(x) = 3e^{3x}(3x-1) + 3e^{3x} = 9xe^{3x}$; quindi $g'(x) > 0$ se $x > 0$ e $g'(x) < 0$ se $x < 0$. Ne segue che g ha un punto di minimo assoluto stretto per $x = 0$. Dato che $g(0) = 0$, otteniamo che g è sempre positiva e di conseguenza anche $f'(x)$ è sempre positiva. Allora f è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, pertanto non ha né punti di massimo né punti di minimo locali e assoluti.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 = \frac{0-1}{-\infty} + 2 = 2$$

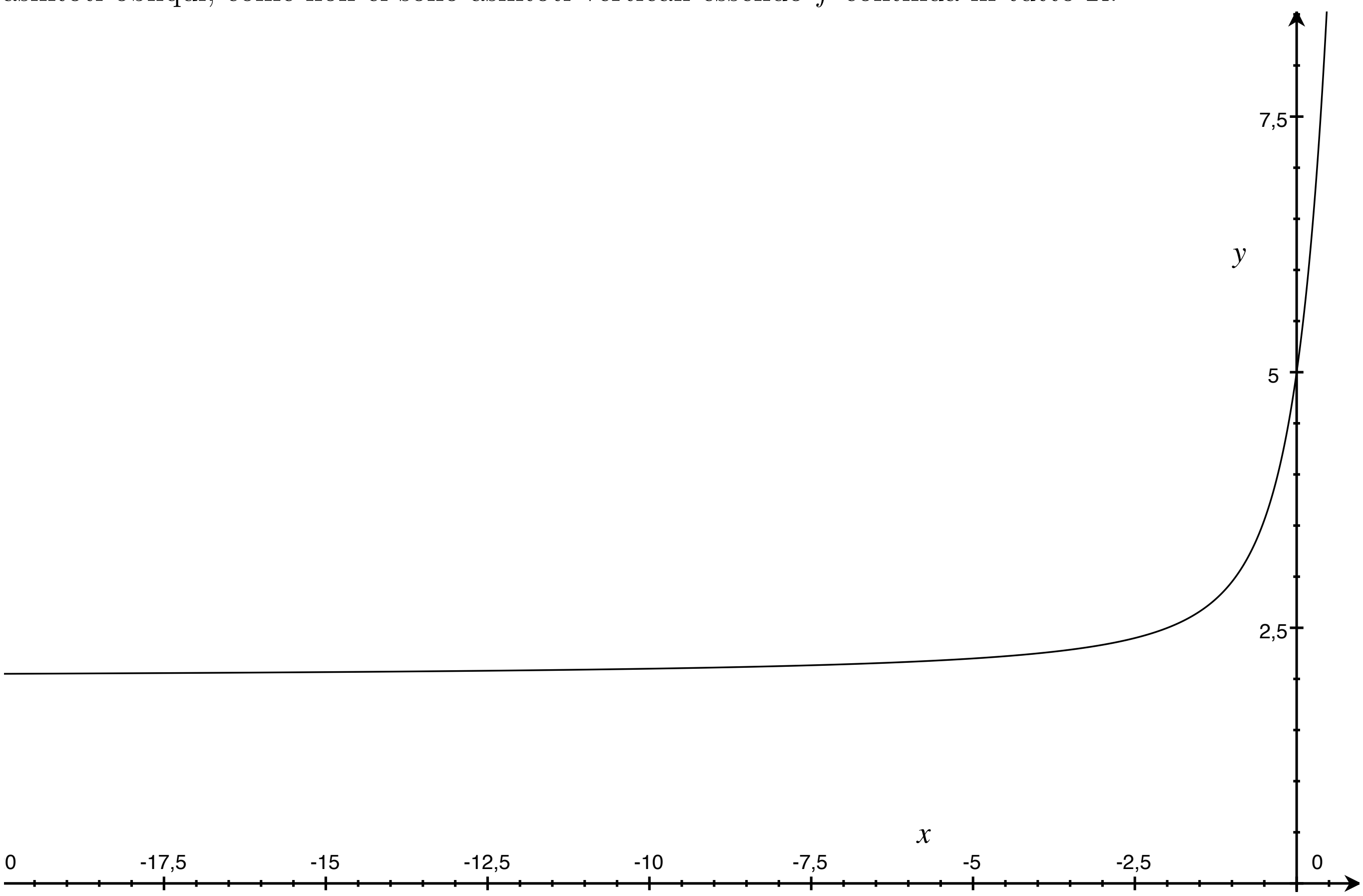
f ha quindi l'asintoto orizzontale $y = 2$ per $x \to -\infty$. Applicando il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{1} + 2 = +\infty.$$

controlliamo quindi l'eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}-1}{x^2} + \frac{2}{x} = +\infty$$

dove l'ultimo limite si può ottenere applicando il teorema di de l'Hôpital 2 volte. Non ci sono quindi asintoti obliqui, come non ci sono asintoti verticali essendo f continua in tutto $\mathbb{R}$.



Esercizio 2 Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{e^{n(\alpha^2-5\alpha+6)}}{3n}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Osserviamo che $\frac{e^{n(\alpha^2-5\alpha+6)}}{3n} > 0$ per ogni $n \geq 1$, quindi la serie è a segni alterni. Studiamo il segno del trinomio $\alpha^2 - 5\alpha + 6$ al variare di α. Risulta che

$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 \begin{cases} > 0 & \text{se } \alpha < 2 \text{ oppure } \alpha > 3 \\ = 0 & \text{se } \alpha = 2 \text{ oppure } \alpha = 3 \\ < 0 & \text{se } 2 < \alpha < 3. \end{cases}$$

Nel primo caso si ha che $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n(\alpha^2-5\alpha+6)}}{3n} = +\infty$ quindi la serie non converge perché il suo termine generale non è infinitesimo. Nel secondo caso la serie diventa

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{3n}$$

che converge semplicemente per il criterio di Leibniz essendo $\frac{1}{3n}$ decrescente e inifinitesima. Non converge assolutamente perché diventa una serie armonica di esponente 1. Nel terzo caso si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{e^{n(\alpha^2-5\alpha+6)}}{3n}\right|} = e^{\alpha^2-5\alpha+6} < 1$$

quindi per il criterio della radice la serie converge assolutamente. Riassumendo si ha convergenza semplice se $\alpha \in [2,3]$ e convergenza assoluta se $\alpha \in (2,3)$.

Esercizio 3 Dire se la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)}$ è integrabile in $(0,+\infty)$.

Soluzione

Osserviamo che la funzione f non è limitata in un intorno di 0, infatti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x^{1/2}(x^2+1)} = +\infty.$$

Dovremo quindi controllare l'integrabilità sia in 0 che a $+\infty$. Dividiamo quindi $(0,+\infty)$ nei due intervalli $(0,1]$ e $(1,+\infty)$ (ricordiamo che l'integrabilità non dipende dalla scelta del punto di divisione). Per $x \to 0^+$ abbiamo che

$$|f(x)| = \left|\frac{x+o(x)}{x^{3/2}(1+o(1))}\right| \sim \frac{1}{x^{1/2}}$$

quindi f è assolutamente integrabile su $(0,1]$ per il criterio del confronto asintotico. Per $x \to +\infty$ abbiamo invece che

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^{7/2}}$$

quindi f è assolutamente integrabile in $(1,+\infty)$ per il criterio del confronto. Ne segue che f è assolutamente integrabile, quindi integrabile, su $(0,+\infty)$.