Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 22 settembre 2008

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia S l'insieme $\left\{ \frac{n^2-1}{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1 \right\}$. Quali delle seguenti affermazioni è vera

D

A) $\sup(S) = +\infty$ B) $\inf(S) = 1$ C) $\inf(S) = -\infty$ D) $\sup(S) = 1$

Domanda 2 $\lim\limits_{n\to\infty} (n^4+1)\left(1 - \cos\frac{3}{n^2}\right)$

A) non esiste B) esiste ed è maggiore di 2

B

C) vale $+\infty$ D) esiste ed è minore o uguale di 1

Domanda 3 Sia (a_n) una successione tale che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora $\lim\limits_{n\to\infty} e^{1/a_n}$

D

A) non esiste B) vale $+\infty$ C) vale 0 D) dipende da (a_n)

Domanda 4 Sia $f : (e, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{3x^3 + e^x}{2x^2 + \log(x^2)}$. Allora

A) f ha un asintoto orizzontale B) f ha un asintoto obliquo

C

C) f non ha asintoti verticali D) f è limitata superiormente

Domanda 5 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte, dispari e strettamente crescente. Allora, necessariamente

D

A) $f'(0) = 0$ B) $f'(0) > 0$ C) $xf''(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ D) $f''(0) = 0$

Domanda 6 La serie $\sum_n \frac{(-1)^n}{2n^2+3n(-1)^n}$

A) converge semplicemente ma non assolutamente B) converge assolutamente

C) diverge positivamente D) è indeterminata

B

Domanda 7 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n/2}}{(\log n)^n}$

A) vale $\sqrt{e}$ B) vale 0 C) vale $+\infty$ D) non esiste

C

Domanda 8 Sia $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sqrt[3]{x}+x^2-\frac{1}{3}x^3}$. Per $x \to 0$, $f(x)$

A) è $o(x^{2/3})$ B) diverge a $+\infty$ C) è $o(\sqrt{x})$ D) è un infinitesimo di ordine 3

C

Domanda 9 Sia $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Allora, necessariamente

A) $\int_0^1 f(x)\,dx = -\infty$ B) $\int_0^1 f(x)\,dx$ esiste ed è finito

C) $\int_0^1 f(x)\,dx$ esiste D) $\int_0^1 f(x)\,dx$ non esiste

C

Domanda 10 $$\int \frac{\cos(2\log x)}{x}\,dx =$$

A) $-\frac{\sin(2\log x)}{x^2} + c$ B) $\log x \cos(2x)$+c

C) $\sin(\log x)\cos(\log x) + c$ D) $\sin(2\log x)\log x + c$

C

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 22 settembre 2008

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Determinare il comportamento della serie

$$\sum_n (\log n)^{\alpha-\frac{3}{2}} \log\left(1+\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{-4\alpha^2+5\alpha}\right)$$

al variare del parametro reale α nell'intervallo $\left(0,\frac{5}{4}\right)$.

Soluzione

Osserviamo subito che la serie è a termini positivi, possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Inoltre se $0<\alpha<\frac{5}{4}$ risulta $-4\alpha^2+5\alpha>0$. Da questo segue che

$$\lim_n \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{-4\alpha^2+5\alpha} = 0.$$

Ricordando che, per $t\to 0$, $\log(1+t)\sim t$ e $\sin t\sim t$, otteniamo

$$(\log n)^{\alpha-\frac{3}{2}} \log\left(1+\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{-4\alpha^2+5\alpha}\right) \sim (\log n)^{\alpha-\frac{3}{2}}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{-4\alpha^2+5\alpha}$$
$$\sim (\log n)^{\alpha-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{n}\right)^{-4\alpha^2+5\alpha} = \frac{1}{(\log n)^{\frac{3}{2}-\alpha}\, n^{-4\alpha^2+5\alpha}}\ .$$

La serie considerata è quindi asintoticamente equivalente a una serie del tipo

$$\sum_n \frac{1}{(\log n)^a\, n^b}$$

che converge se e solo se $b>1$ oppure $b=1$ e $a>1$. Nel nostro caso

$$-4\alpha^2+5\alpha>1 \iff \frac{1}{4}<\alpha<1$$

$$-4\alpha^2+5\alpha=1 \iff \alpha=\frac{1}{4} \text{ oppure } \alpha=1.$$

Se $\alpha=\frac{1}{4}$ si ha che $\frac{3}{2}-\alpha=\frac{5}{4}>1$ mentre se $\alpha=1$ risulta $\frac{3}{2}-\alpha=\frac{1}{2}<1$. In conclusione la serie data converge se $\frac{1}{4}\le\alpha<1$ e diverge positivamente in tutti gli altri casi.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-1}{x\sin(x^2-1)} & \text{se } 0<x<1 \\ \alpha x+\beta & \text{se } 1\le x\le 2 \\ (x-2)^2\left(\log(x-2)\right)^2 & \text{se } x>2 \end{cases}$$

dire per quali valori dei parametri reali α e β la f è continua o derivabile nella semiretta $(0,+\infty)$.

Soluzione

In tutti i punti di $(0,+\infty)$ diversi da 1 e 2 la funzione è sicuramente derivabile (quindi continua) poiché è composizione di funzioni derivabili. Vediamo la continuità in 1 e 2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x\sin(x^2-1)} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1+(x-1)+o(x-1)-1}{x\,(x^2-1)+o(x^2-1))} \\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)+o(x-1)}{x(x+1)(x-1)+o(x-1)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\alpha x+\beta = \alpha+\beta = f(1)$$

quindi per avere la continuità in 1 otteniamo la condizione $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\alpha x+\beta = 2\alpha+\beta = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x-2)^2\left(\log(x-2)\right)^2 = \lim_{t\to 0^+}(t\log t)^2 = 0$$

quindi per avere la continuità in 2 otteniamo la condizione $2\alpha+\beta=0$. Mettendo insieme le due condizioni otteniamo un sistema lineare che ha per unica soluzione $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=1$. Per tutti gli altri valori dei parametri α e β la funzione non è continua, quindi neanche derivabile. Studiamo ora la derivabilità nel caso $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=1$. Partiamo dal punto $x=2$. Se $1<x<2$ risulta $f(x)=-\frac{x}{2}+1$ quindi $f'(x)=-\frac{1}{2}$. Allora

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

Per $x>2$ invece abbiamo $f'(x)=2(x-2)\left(\log(x-2)\right)^2+2(x-2)\log(x-2)$ quindi

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} 2(x-2)\left(\log(x-2)\right)^2+2(x-2)\log(x-2) = 0$$

da cui segue che la funzione f non è derivabile in $x=2$. Risulta quindi inutile fare la verifica anche nel punto $x=1$. Riassumendo, la f è continua in $(0,+\infty)$ solo per $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=1$ e non è derivabile per nessuna coppia di valori dei parametri α e β.

Esercizio 3 Stabilire se esiste finito il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(2+3x^4)\arctan(x^{5/2})}\,dx\ .$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda diverge positivamente per $x \to 0^+$, che è continua e strettamente positiva per ogni $x > 0$. Per decidere l'integrabilità dovremo quindi esaminare separatamente gli intevalli $(0, 1)$ e $[1, +\infty)$ (ricordiamo che la scelta del punto $x = 1$ è del tutto arbitraria e poteva essere scelto qualsiasi altro punto $c > 0$ per spezzare l'intervallo di integrazione). Applicheremo il criterio del confronto asintotico. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{(2+3x^4)\arctan(x^{5/2})}\, x^{1/2} = \frac{1}{2}$$

quindi per $x \to 0^+$ la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^{1/2}}$ che è integrabile nell'intervallo $(0, 1)$. Esaminiamo ora l'altro intervallo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{(2+3x^4)\arctan(x^{5/2})}\, x^2 = \frac{2}{3\pi}$$

quindi per $x \to +\infty$ la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^2}$ che è integrabile nell'intervallo $(0, +\infty)$. Ne segue che l'integrale proposto esiste finito.