Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 21 luglio 2008

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia (a_n) la successione definita da $a_n = \log(n^4)\sin\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$. Allora

A) (a_n) è limitata B) (a_n) non è limitata inferiormente

C) non esiste $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ D) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 2 Sia $f(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{\log x}\right)}{x}$. Allora

A) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge B) $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

C) $\displaystyle\int_e^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ D) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$ non esiste

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 3 Se $a_n \le 0$ e $a_{n+1} \ge a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora, necessariamente

A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge B) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n}{n\sqrt{n}}$ converge

C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2\, a_n$ diverge

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 4 La serie $\displaystyle\sum_{n\ge 2} \frac{(\log n)^{\alpha n}}{n^3}$

A) diverge per ogni $\alpha \le 1$ B) converge assolutamente per ogni $\alpha \ge 1$

C) converge per ogni $\alpha \le 0$ D) diverge per ogni $\alpha \ge 0$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 5 Sia $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

A) f è crescente per $x \geq 0$ B) f ha un punto di massimo locale

C) f è limitata D) f ha minimo assoluto

B

Domanda 6 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx$

A) non esiste B) vale 0 C) è un numero reale minore di 3 D) vale $+\infty$

A

Domanda 7 Sia $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e decrescente. Allora, necessariamente $\displaystyle\int_a^b e^{f(x)}\, dx$

A) vale $e^{f(b)} - e^{f(a)}$ B) vale $e^{f'(b)} - e^{f'(a)}$
C) è un numero reale minore o uguale di $e^{f(a)}|b-a|$

D) è un numero reale minore o uguale di 1

C

Domanda 8 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata superiormente con $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora, necessariamente

A) la funzione $g(x) = f(-x)$ è limitata inferiormente
B) la funzione $g(x) = -\left(f(x)\right)^2$ è limitata inferiormente
C) la funzione $g(x) = \log|f(x)|$ è limitata inferiormente

D) la funzione $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2+1}$ è limitata superiormente

D

Domanda 9 Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali positivi con $0 < b_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Allora, necessariamente:
A) $a_n\, b_n$ è limitata B) $|b_n|^{a_n}$ è limitata

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = +\infty$ D) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + \log b_n) = +\infty$

B

Domanda 10 Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con un solo punto di massimo assoluto.
Allora, necessariamente:

A) f ha un solo punto di minimo locale B) f è concava

C) f non è monotona D) f è inferiormente limitata

D

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 21 luglio 2008

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Data $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

dire se è definita per ogni $x \geq 0$, determinarne insiemi di continuità, di derivabilità ed eventuali asintoti orizzontali o obliqui. Dire poi se la funzione ammette massimo o minimo assoluti.

Soluzione

La funzione è definita nei punti dove non si annulla il denominatore $2x^4 - \sqrt{x} + x^2 = \sqrt{x}(2x^{7/2} - 1 + x^{3/2})$. Poniamo $g(x) = 2x^{7/2} - 1 + x^{3/2}$ e osserviamo che $g(0) = -1 < 0$ mentre $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ quindi esiste sicuranente un punto $x_0 > 0$ dove si annulla il denominatore. Inoltre risulta $g'(x) = 7x^{5/2} + \frac{3}{2}x^{1/2} > 0$ quindi gli unici punti dove si annulla il denominatore sono 0 e x_0. Quindi la funzione non è definita per ogni $x \geq 0$.

La funzione è sicuramente continua in ogni punto $x > 0$ del suo insieme di definizione. Inoltre

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+x)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{x + o(x)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{2x^{7/2} - 1 + x^{3/2}} = 0 = f(0)$$

quindi la funzione è continua anche in 0. Per la derivabilità calcoliamo il limite del rapporto incrementale in 0 (negli altri punti è sicuramente derivabile).

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+x)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2)x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1 + o(1)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{1 + o(1)}{\sqrt{x}(2x^{7/2} - 1 + x^{3/2})} = -\infty$$

quindi la funzione non è derivabile in 0.

Osserviamo ora che, applicando il teorema di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2} = 0$$

quindi f ha l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. Ne segue automaticamente che f non ha asintoti obliqui.

Infine osserviamo che nel punto $x_0 > 0$ dove si annulla il denominatore, dato che $g(x) < 0$ per $x < x_0$ e $g(x) > 0$ per $x > x_0$, risulta

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{\log(1+x)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2} = \frac{\log(1+x_0)}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{\log(1+x)}{2x^4-\sqrt{x}+x^2} = \frac{\log(1+x_0)}{0^+} = +\infty$$

quindi f non è né superiormente né inferiormente limitata, pertanto non ammette massimo e minimo assoluti.

Esercizio 2 Data $f(x) = \max\{\sin x - \cos x, 0\}$ calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx$

Soluzione

Osserviamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\sin x \geq \cos x$ quindi se e solo se $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Allora

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)^2 \, dx = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x \, dx =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} 1 - 2\sin x \cos x \, dx = \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + \Big[\cos(2x)\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \pi.$$

Esercizio 3 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{\,2n}+5^n}{6^n}}$.

Soluzione

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{\,2n}+5^n}{6^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^{\,n}+5^n}{6^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^{\,n}\left(\frac{4^n}{5^n}+1\right)}{6^n}} = \frac{5}{6} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4^n}{5^n}+1\right)} = \frac{5}{6}.$$