Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 1 luglio 2008

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Data la successione $a_n = \dfrac{1}{\log(n^3)\sin(-\frac{1}{n})}$ definita per $n > 1$, risulta che

A) esiste il minimo di (a_n) B) esiste il massimo di (a_n)

C) non esiste il limite di (a_n) D) (a_n) è limitata inferiormente

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 2 La serie $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(\log n)^2} \arctan \frac{1}{n^\alpha}$, definita per $n \geq 2$,

A) diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ B) diverge per ogni $\alpha \leq 1$

C) converge per ogni $\alpha \geq 1$ D) diverge per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 3 Date due successioni di numeri reali (a_n) e (b_n) tali che $|a_n - b_n| < \dfrac{1}{n^2}$ $\forall n \geq 1$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, risulta necessariamente che:

A) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{b_n}$ converge B) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n + b_n}$ converge

C) $\displaystyle\sum_n b_n - a_n$ diverge D) $\displaystyle\sum_n (a_n - b_n)\sqrt{n}$ converge

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 4 Data la successione $a_n = \dfrac{(e^{2n} - 1)(\cos n)^3}{ne^{3n}}$ risulta che

A) non esiste il limite di (a_n) B) $a_n \geq 0$ definitivamente

C) a_n è limitata inferiormente D) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 5 Sia $f(x) = \log|\sin(2x)|$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. Risulta che

A) f non è limitata superiormente B) f è crescente

D

C) f è limitata inferiormente D) f ha massimo

Domanda 6 Si consideri la funzione $f(x) = \arctan x \cdot \arctan(3x)$. Allora

A) f è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty)$ B) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$

C) f non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, 0]$

C

D) f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, +\infty)$

Domanda 7 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ necessariamente si ha che:

A) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{f(t)}\, dt$ è crescente B) $F(x) = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} |f(t)|\, dt$ è crescente per $x < 0$

A

C) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$ è limitata superiormente per $x > 1$ D) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f^2(t)\, dt$ è crescente

Domanda 8 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ decrescente e strettamente negativa. Allora, necessariamente:

B

A) $\dfrac{1}{f}$ è decrescente B) $\dfrac{1}{f^2}$ è decrescente C) $\dfrac{1}{f^2}$ è crescente D) $\log|f|$ è decrescente

Domanda 9 La funzione $f(x) = \sin(\log(x^2))$, definita per ogni $x \neq 0$

A) è iniettiva B) ha un solo punto di minimo assoluto

C

C) ha infiniti punti di massimo locale D) non è limitata superiormente

Domanda 10 Data $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $f < 0$, risulta necessariamente che

A) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1 + x^2}\, dx$ esiste finito B) f non è integrabile in senso generalizzato

C

C) $\displaystyle\int_0^1 e^{f(x)}\, dx$ esiste finito D) f è integrabile in senso generalizzato

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 1 luglio 2008

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Sia $f(x) = \dfrac{x^3+2}{e^x+x^2}$. Determinare gli asintoti di f e dire se esistono punti di massimo o di minimo assoluto.

Soluzione

La funzione è definita in tutta la retta reale dove risulta anche continua e derivabile (il denominatore è sempre strettamente positivo). Calcoliamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{e^x+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{2}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}+1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2}{e^x+x^2} = 0$$

dove l'ultimo limite si può ottenere facilmente applicando ripetutamente il teorema di de l'Hôpital. Quindi la funzione ha l'asintoto orizzontale $y=0$ per $x\to+\infty$. Verifichiamo la presenza di un asintoto obliquo a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{e^x+x^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1+\frac{2}{x^3}}{\frac{e^x}{x^2}+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{e^x+x^2} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-xe^x}{e^x+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}-e^x}{\frac{e^x}{x}+x} = 0$$

la funzione ha quindi l'asintoto obliquo $y=x$ per $x\to-\infty$. Non ci sono punti di minimo assoluto perché la funzione non è limitata inferiormente. Esiste invece almeno un punto di massimo assoluto come andiamo a verificare. Calcoliamo la derivata di f.

$$f'(x) = \frac{e^x(-x^3+3x^2-2)+x^4-2x}{(e^x+x^2)^2}.$$

Osserviamo che il denominatore è sempre positivo, mentre il numeratore tende a $-\infty$ per $x\to+\infty$. Ne segue che $f'(x)$ é negativa per x abbastanza grande. Quindi la f è decrescente definitivamente. Più precisamente, esiste $x_0\in\mathbb{R}$ tale che se $x>x_0$ si ha che $f(x)\le f(x_0)$. Dato che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, esiste x_1 tale che, se $x<x_1$ si ha che $f(x)\le f(x_0)$. Possiamo suppore che sia $x_1<x_0$ e ne segue che l'eventuale massimo di f può essere cercato nell'intervallo $[x_1,x_0]$. In tale intervallo la f è continua, quindi per il teorema di Weierstrass, il massimo esiste.

Esercizio 2 Dire se esiste ed eventualmente calcolare il seguente limite:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left((\sin n)^6\right)\right)^{n/2}$$

Soluzione

Il limite cercato esiste e vale zero, come andiamo a dimostrare.
$$-1 \le \sin n \le 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$0 \le (\sin n)^6 \le 1 < \frac{\pi}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Dato che la funzione seno è crescente nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha
$$0 \le \sin\left((\sin n)^6\right) \le \sin 1 < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$0 \le \left[\sin\left((\sin n)^6\right)\right]^{n/2} \le (\sin 1)^{n/2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
osservando che $\lim_{n\to\infty}(\sin 1)^{n/2} = 0$ e applicando il teorema dei carabinieri si ottiene la tesi.

Esercizio 3 Determinare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} - \log n}$, definita per $n \ge 1$.

Soluzione

Per prima cosa studiamo la successione $a_n = \sqrt{n} - \log n$.
Definiamo la funzione $f(x) = \sqrt{x} - \log x$ con $x \in \mathbb{R},\ x \ge 1$. Derivando f otteniamo
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$
quindi $f'(x) \ge 0$ se $x \ge 4$. Dato che $f(4) = 2 - \log 2 > 0$ si ottiene che $f(x) > 0$ per ogni $x \ge 4$. Quindi $a_n = f(n) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre la successione a_n è crescente per $n \ge 4$. Infine $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, come si vede facilmente applicando il teorema di de l'Hôpital a $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)$.

Possiamo ora considerare la convergenza assoluta.
$$\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} - \log n}\right| = \frac{1}{|\sqrt{n} - \log n|} = \frac{1}{\sqrt{n} - \log n} \ge \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad n \ge 4$$
dove abbiamo tenuto conto della positività del denominatore per $n \ge 4$. Ora osserviamo che $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge positivamente e, dal criterio del confronto, otteniamo che la serie originale non converge assolutamente.

Vediamo ora la convergenza semplice.
Dato che la successione a_n è positiva e crescente, si ha che $\frac{1}{\sqrt{n} - \log n}$ è una successione positiva e decrescente. Inoltre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - \log n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n} = 0.$$
Possiamo quindi applicare il criterio di Leibniz e ottenere la convergenza della serie.