Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Civile dell'Ambiente e Territorio

e Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Analisi Matematica I

Pisa, 10 giugno 2008

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 La serie $\sum_n \frac{\cos(n\pi)e^{-2n}}{n}$

A) converge semplicemente ma non assolutamente B) diverge

C) converge assolutamente D) è indeterminata

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 2 La successione $a_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \sin(n^2)$ è:

A) strettamente crescente e limitata superiormente

B) stettamente decrescente e limitata inferiormente

C) non è limitata superiormente D) è limitata inferiormente

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 3 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Allora, necessariamente:

A) $\sup f = 1$ B) f è crescente

C) f è limitata D) f non ha punti di minimo assoluto

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 4 Sia $F(x) = \int_1^{\sin x} f(t)\,dt$ dove f è una funzione positiva e continua in tutto $\mathbb{R}$. Allora

A) $F(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ B) $F(x)$ ha un minimo locale in $x = \pi$

C) $\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$ D) F è decrescente

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 5 La serie $\sum_n \frac{(-1)^n (\log \frac{1}{2})^n}{n(\log 2)^{n-1}}$

A) è indeterminata B) converge assolutamente C) diverge

C

D) converge semplicemente ma non assolutamente

Domanda 6 L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |\sin x| < 1\}$ è:

A) limitato superiormente B) un intervallo

D

C) limitato inferiormente D) non limitato

Domanda 7 Sia (a_n) una successione crescente e infinitesima. Allora $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{a_n}}$

C

A) non esiste B) vale $+\infty$ C) vale 0 D) vale 1

Domanda 8 Si consideri la successione $a_n = (-1)^n \sin(n^2) \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. Allora

A) (a_n) è a segni alterni B) $\sup a_n = 0$

D

C) non esiste $\lim_{n\to\infty} a_n$ D) (a_n) è limitata superiormente

Domanda 9 Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^2 tale che $f'(0) = 0$. Allora

A) f assume il suo massimo assoluto nel punto $x = 0$ B) $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$

B

C) f è una funzione non negativa in $[0, +\infty)$ D) f è limitata superiormente

Domanda 10 Sia $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Allora

A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)^\alpha}\, dx < \infty$ per $\alpha > 1$ B) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\, f(x)^\alpha}\, dx < \infty$ per $\alpha < 1$

C

C) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + f(x)}\, dx < \infty$ per $\alpha > 1$ D) $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}\, dx < \infty$ per $\alpha > 1$

Università di Pisa - Corsi di Laurea in Ingegneria Civile dell'Ambiente e Territorio

e Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Analisi Matematica I

Pisa, 10 giugno 2008

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

determinandone estremi superiore e inferiore, eventuali estremi assoluti e asintoti.

Soluzione

La funzione integranda è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, quindi la F è una funzione di classe C^1 in tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che la funzione integranda è pari e che $F(0) = 0$ quindi F è dispari. Studieremo pertanto F solo sulla semiretta $[0, +\infty)$ ottenendo i risultati sulla semiretta complementare per simmetria. Dalla maggiorazione

$$\frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{t^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \geq \frac{1}{t}$$

valida per $t \geq \sqrt{e-1}$ si ottiene, dal teorema di confronto, che l'integrale generalizzato di $\frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{t^2+1}}$ diverge positivamente. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{t^2+1}}\, dt = +\infty.$$

Per simmetria avremo quindi $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene che

$$F'(x) = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \qquad \forall x \neq 0$$

e $F'(0) = 0$. Ne segue che F è crescente in tutto $\mathbb{R}$. Non esistono quindi punti di massimo o minimo relativi o assoluti per F. Dalle considerazioni sui limiti si ottiene anche che

$$\sup F = +\infty, \qquad \inf F = -\infty.$$

Verifichiamo l'eventuale esistenza di asintoti obliqui. Applichiamo il teorema di de l'Hôpital al limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ calcolando $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ dove l'ultimo limite può essere ottenuto applicando nuovamente il teorema di de l'Hôpital o da considerazioni dirette sull'ordine di infinito della funzione logaritmo. Quindi il coefficiente angolare dell'ipotetico asintoto obliquo dovrebbe essere 0 ma questo comporterebbe l'esistenza di un asintoto orizzontale, resa però impossibile dalla condizione $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_n (-1)^n \frac{e^{n(\alpha^2+\alpha-2)}}{3n}$$

determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge semplicemente e assolutamente.

Soluzione

Verifichiamo prima la convergenza assoluta applicando il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{e^{n(\alpha^2+\alpha-2)}}{3n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha^2+\alpha-2}}{\sqrt[n]{3n}} = e^{\alpha^2+\alpha-2}.$$

Avremo quindi convergenza assoluta quando $e^{\alpha^2+\alpha-2} < 1$, cioè se $\alpha^2+\alpha-2 < 0$ che corrisponde alla condizione $-2 < \alpha < 1$. Se invece $\alpha > 1$ oppure $\alpha < -2$ si ottiene subito che il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie non converge, né assolutamente né semplicemente. Nei casi $\alpha = -2,\ \alpha = 1$ il criterio della radice non ci fornisce informazioni. Sostituendo direttamente i valori otteniamo, in entrambi i casi, la serie

$$\sum_n (-1)^n \frac{1}{3n}$$

che, per il criterio di Leibniz converge. Studiandone invece la convergenza assoluta abbiamo una serie armonica che è divergente. Riassumendo, la serie considerata converge semplicemente per $\alpha \in [-2, 1]$ e assolutamente per $\alpha \in (-2, 1)$.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^5 + 2x^2 & \text{per } x \geq 0 \\ \dfrac{\log(1+x^2) - x^2}{\sqrt[3]{x^2}} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

stabilirne l'eventuale continuità e derivabilità.

Soluzione

La funzione è continua e derivabile in ogni punto $x \neq 0$ essendo composizione e prodotto di funzioni continue e derivabili. Resta da verificare il punto $x = 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} x^5 + 2x^2 = 0 = f(0)$$

mentre per il limite sinistro utilizziamo lo sviluppo di Taylor in $t = 0$ della funzione logaritmo

$$\log(1+t) = t + o(t)$$

con $t = x^2$, ottenendo

$$\frac{\log(1+x^2)-x^2}{\sqrt[3]{x^2}} = \left(x^2 + o(x^2) - x^2\right) x^{-2/3} = o(x^{4/3}).$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x^2)-x^2}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

e la funzione f è continua in $x = 0$. Per la derivabilità in $x = 0$ calcoliamo i limiti dei rapporti incrementali destro e sinistro

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^5+2x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^4 + 2x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x^2)-x^2}{x\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{o(x^{4/3})}{x} = \lim_{x\to 0^-} o(x^{1/3}) = 0.$$

I due limiti sono uguali quindi la funzione è derivabile in $x = 0$. In definitiva f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.