Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 12 febbraio 2008

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia $F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2+1}\, dt$ allora

A) $F''(x) = \int_1^{x^2} 2te^{t^2+1}\, dt$ B) $F''(x) = 2e^{x^4+1}(1+4x^4)$

C) $F''(x) = e^{x^4+1} - e^2$ D) $F''(x) = 2x \int_1^{x} e^{t^2+1}\, dt$

$\boxed{B}$

Domanda 2 Siano $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 con $f > 0$, allora, necessariamente si ha che $\int \frac{f'g}{f}\, dx =$

A) $\frac{fg'}{f^2}$ B) $fg - \int \frac{fg'}{g}\, dx$ C) $g \log f - \int g' \log f\, dx$ D) $\log(fg) - \int f'g\, dx$

$\boxed{C}$

Domanda 3 $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\log x}$

A) diverge negativamente B) vale $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}$ C) diverge positivamente D) non esiste

$\boxed{A}$

Domanda 4 Sia (a_n) una successione di numeri reali positivi tale che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$. Allora

A) $\sum_n \frac{a_n}{4}$ converge B) $\sum_n \frac{a_n}{2^n}$ diverge

C) $\sum_n (-1)^n \frac{a_n}{2^n}$ converge D) $\sum_n (-1)^n \frac{a_n}{4^n}$ è indeterminata

$\boxed{B}$

Domanda 5 $e^z + e^{\bar{z}} =$

A) $e^{2\mathbf{Re}(z)}$ B) $\dfrac{e^z e^{\bar{z}}}{e^{|z|}}$ C) $2e^{\mathbf{Re}(z)}\cos(\mathbf{Im}(z))$ D) $\dfrac{e^{|z|^2}}{\bar{z}}$

C

Domanda 6 Sia (a_n) una successione di numeri reali tale che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{n^2} = +\infty$. Allora, necessariamente

A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - e^n = +\infty$ B) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + n = +\infty$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = +\infty$ D) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{n^3} = 0$

C

Domanda 7 Sia $f(x) = \begin{cases} x\sin x \cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Allora

A) f non ha derivata in $x = 0$ B) $f'(0) = 0$

C) $f'(0) = +\infty$ D) $f'_+(0) = +\infty,\ f'_-(0) = -\infty$

B

Domanda 8 Se $|z| = |3+i|$ allora, necessariamente:

A) $z^2 = 8 - 2i$ B) $|e^z| = e^3$ C) $|z|^2 = \frac{3-i}{10}$ D) $|\bar{z}| = \sqrt{10}$

D

Domanda 9 Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$. Dire quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera:

A) se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ B) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$

C) se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ D) se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

C

Domanda 10 La funzione $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2+1}}$ definita su $\mathbb{R}$:

A) è limitata superiormente B) è limitata inferiormente

C) è strettamente crescente D) ha due punti di massimo locale e uno di minimo locale

C

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 12 febbraio 2008

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

Esercizio 1 Data la funzione $f(x) = \dfrac{xe^x + 2}{e^x + 1}$ determinarne l'insieme di definizione, di continuità, di derivabilità, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo locali e assoluti, gli estremi superiore e inferiore e gli eventuali asintoti.

Soluzione

La funzione è definita continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo quoziente di funzioni derivabili con denominatore sempre diverso da zero. Cerchiamo ora eventuali asintoti orizzotali:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x + 2}{e^x + 1} = \frac{0+2}{0+1} = 2, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x + 2}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2e^{-x}}{1 + e^{-x}} = +\infty$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{t\to+\infty} -te^{-t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{e^t} = 0$$

per gerarchia di infiniti. Quindi f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 2$ per x che tende a $-\infty$. Vediamo se ha un asintoto obliquo per x che tende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \frac{2}{x}}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{xe^x}}{1 + \frac{x}{e^x}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - x}{e^x + 1} = 0$$

quindi l'asintoto obliquo a $+\infty$ ha equazione $y = x$.

Studiamo ora la derivata di f:

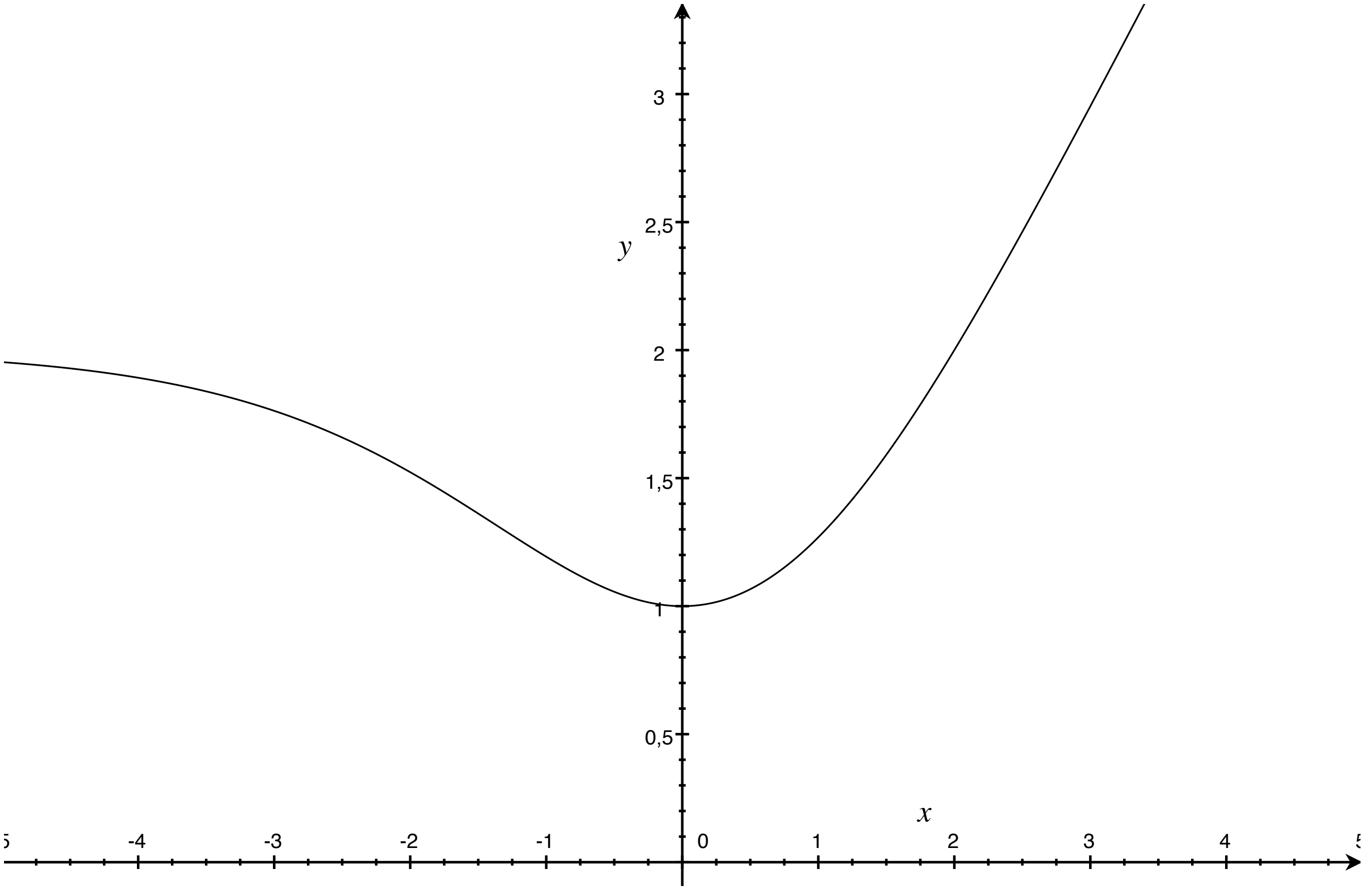
$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - e^x(xe^x + 2)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + x - 1)}{(e^x + 1)^2}.$$

Il denominatore di f' è sempre positivo, quindi il segno è determinato dal solo numeratore:

$$f'(x) \geq 0 \iff e^x + x - 1.$$

Determiniamo quindi il segno della funzione $g(x) = e^x + x - 1$. Osserviamo che $g(0) = 0$ e che $g'(x) = e^x + 1 > 0$ per ogni x. Quindi g è sempre strettamente crescente e si annulla per $x = 0$. Ne segue che $g(x) > 0$ se $x > 0$ e $g(x) < 0$ se $x < 0$ e lo stesso si può dire di f'. Ne segue che f è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$, quindi $x = 0$ è punto di minimo assoluto (e locale). Dato che $f(0) = 1$ risulterà $\inf(f) = \min(f) = 1$. Dal fatto che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

segue che f non ha massimo assoluto e $\sup(f) = +\infty$. Non ci sono massimi relativi perché f è definita e derivabile su un insieme aperto e l'unico punto dove si annulla la derivata è di minimo.



Esercizio 2 Dire se esiste finito e in caso affermativo calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}.$$

Soluzione

La funzione integranda è continua e positiva sull'intervallo $(0,1)$ ma non è limitata intorno al punto $x = 0$. Osserviamo che, per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

quindi per il criterio di confronto asintotico la funzione ha integrale generalizzato finito. Calcoliamone il valore effettuando la sostituzione $\sqrt{x} = t$, $dx = 2t\,dt$:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{2t}{t(1+t)^3}\,dt = \left[-\frac{1}{(1+t)^2}\right]_{\sqrt{\varepsilon}}^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2}$$

quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3 Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_n \frac{4^n}{n^3 (7^{\alpha+2})^n}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Osserviamo che la serie è a termini positivi e applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{n^3 (7^{\alpha+2})^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{7^{\alpha+2}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} \right) = \frac{4}{7^{\alpha+2}}.$$

Avremo quindi convergenza per gli α tali che $\frac{4}{7^{\alpha+2}} < 1$, cioè per $\alpha > \frac{\log 4}{\log 7} - 2$. Se invece $\alpha < \frac{\log 4}{\log 7} - 2$ la serie diverge. Rimane da esaminare il caso, non coperto dal criterio della radice, quando $\alpha = \frac{\log 4}{\log 7} - 2$. Sostituendo tale valore di α nella serie originale si ottiene:

$$\sum_n \frac{1}{n^3}$$

che è una serie armonica di esponente $3 > 1$ quindi convergente. Riassumendo, la serie converge per $\alpha \geq \frac{\log 4}{\log 7} - 2$ e diverge positivamente per i rimanenti valori di α.