Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 28 gennaio 2008

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Date $f, g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 con $g(x) \neq 0$ per ogni x, necessariamente risulta:

A) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} (g'(x))^2\,dx}$ B) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} g(x)^2\,dx}$

C) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = f(1)g'(-1) - \int_{-1}^{1} \frac{f'(x)}{g(x)^2}\,dx$ D) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \in \mathbb{R}$

D

Domanda 2 Sia $f : (-2,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora, necessariamente:

A) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $|f'(x)| < \varepsilon$

B) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $\left|\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right| < \varepsilon$

C) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $\left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon$

D) $\exists \delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $|f'(x)| < \varepsilon$

C

Domanda 3 Sia $F(x) = \int_{e^x}^{1} f''(t)\,dt$. Allora, necessariamente:

A) $F'(x) = f(e^x) - f(1)$ B) $F'(x) = \int_{1}^{x} e^t f'(t)\,dt$

C) $F'(x) = f'(1) - f'(e^x)$ D) $F'(x) = -f''(e^x)e^x$

D

Domanda 4 Sia $f : (-\infty, 5) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x \to 5^-} x f(x) = 3$. Allora, necessariamente:

A) $\int_{-\infty}^{5} |f(x)|^2\,dx < +\infty$ B) $\int_{0}^{5} \left|f(x)x^{3/2}\right|\,dx < +\infty$

C) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{f(x)}{x}\,dx = -\infty$ D) $\int_{-1}^{1} f(x)x^2\,dx = 0$

B

Domanda 5 La parte reale di $\dfrac{e^{1+i}}{i}$ è:

$\boxed{\text{B}}$

A) e B) $e\sin 1$ C) e^i D) $\sqrt{2}\cos 1$

Domanda 6 Sia $f(x) = (\cos x + 2)^{(x^2)}$ allora:
A) $f'(x) = -2x\sin x$ B) $f'(x) = x^2\log(2-\sin x)$

$\boxed{\text{C}}$

C) $f'(x) = x(\cos x+2)^{(x^2)}\left(2\log(\cos x+2) - \dfrac{x\sin x}{\cos x+2}\right)$ D) f non è derivabile se $x < 0$

Domanda 7 Sia (a_n) una successione di numeri reali tale che $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = 2$. Allora:
A) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\overline{n}\in\mathbb{N}$ t.c. se $n \geq \overline{n}$ allora $|a_n| < |n-2|\varepsilon$
B) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che se $n \geq \overline{n}$ allora $a_n < 2n + \varepsilon n$
C) $\forall n\in\mathbb{N}$ e $\forall\varepsilon > 0$ risulta $|a_n| < 2\varepsilon n$

$\boxed{\text{B}}$

D) $\exists\overline{n}$ tale che $\forall n \geq \overline{n}$ e $\forall\varepsilon > 0$ risulta $|a_n| < 2\varepsilon$

Domanda 8 Dato $z = a + ib$ con $a, b\in\mathbb{R}$ si ha che $\mathbf{Re}(z + \overline{z}^2) =$

$\boxed{\text{B}}$

A) $a^2 + a$ B) $a(a+1) - b^2$ C) $|z|^2 - \overline{z}^3$ D) $|z| - b + a^2$

Domanda 9 Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali positivi tali che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\sum_n \frac{a_n^2}{b_n}$ diverge B) $\sum_n a_n b_n^2$ converge C) $\sum_n a_n^{b_n}$ converge D) $\sum_n (a_n - 1)b_n$ converge

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 10 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x+1}\,dx =$

$\boxed{\text{C}}$

A) $+\infty$ B) $-\infty$ C) e D) $e+1$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 28 gennaio 2008

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(1+\frac{\cos n}{2}\right)\right)^n$.

Soluzione

Dato che $-1 \le \cos n \le 1$ si ottiene che $\frac{1}{2} \le 1 + \frac{\cos n}{2} \le \frac{3}{2}$. Dal fatto che la funzione coseno è decrescente nell'intervallo $[0, \pi]$ segue che

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} < \cos\frac{3}{2} \le \cos\left(1+\frac{\cos n}{2}\right) \le \cos\frac{1}{2} < 1.$$

Quindi

$$\left(\cos\frac{1}{2}\right)^n \le \left(\cos\left(1+\frac{\cos n}{2}\right)\right)^n \le \left(\cos\frac{3}{2}\right)^n$$

e dal teorema dei carabinieri si ottiene che il limite cercato vale 0, dato che le due progressioni geometriche che lo limitano dall'alto e dal basso sono entrambe di ragione minore di 1.

Esercizio 2 Data la funzione $f(x) = xe^{4-x^2}$ determinarne insiemi di definizione, continuità, derivabilità, intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi locali e assoluti, estremo superiore e inferiore, asintoti, insiemi di convessità, concavità e punti di flesso. Tracciare poi un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita in tutti i punti di $\mathbb{R}$, dove è anche continua e derivabile in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili. Osserviamo subito che $f(-x) = -f(x)$ quindi la funzione è dispari. Osservando che $f(x) = \frac{x}{e^{x^2-4}}$ e applicando il teorema di de l'Hôpital otteniamo che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Il limite per $x \to -\infty$ vale ugualmente 0 perché f è dispari.
La derivata di f è:

$$f'(x) = e^{4-x^2}(1-2x^2)$$

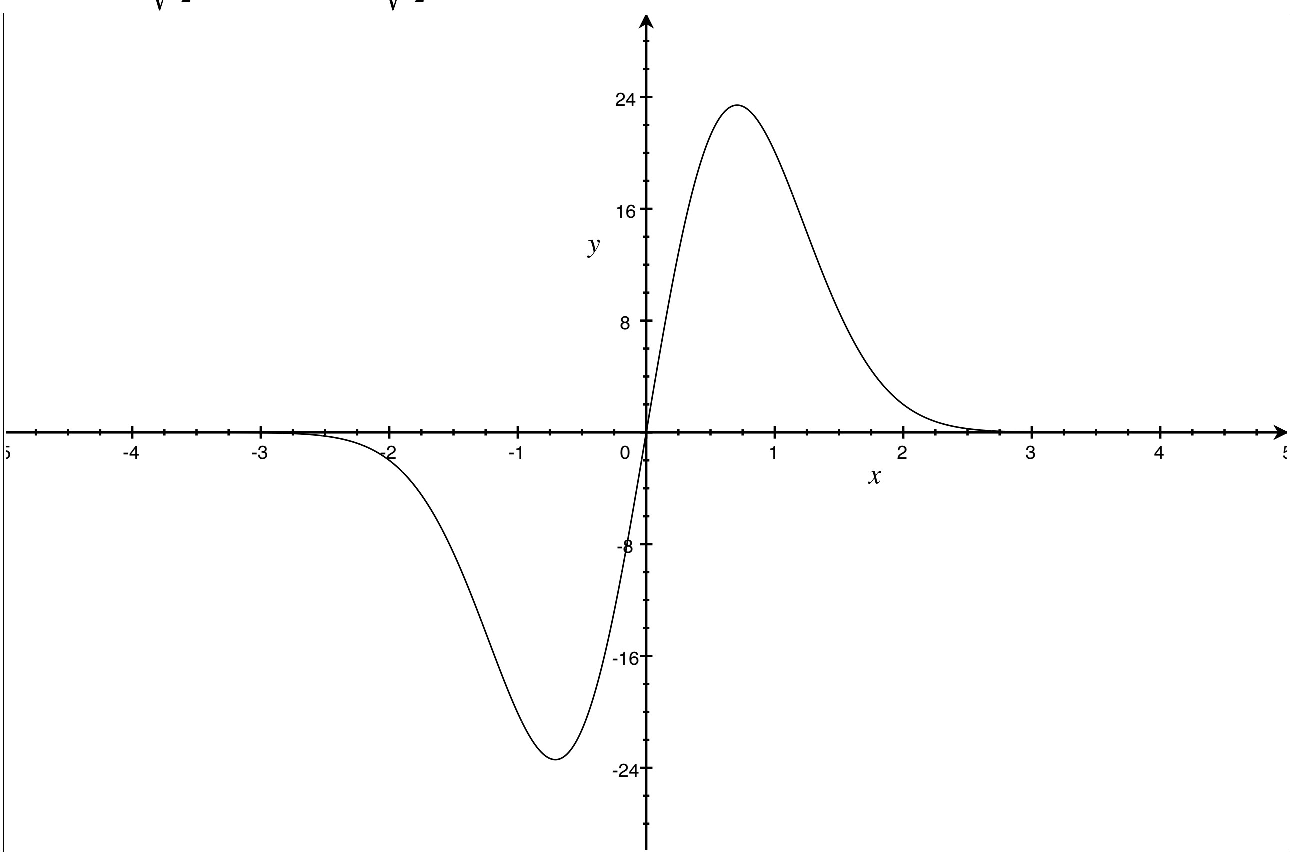
che risulta positiva quando $1 - 2x^2 > 0$ dato che la funzione esponenziale è sempre positiva. Quindi $f'(x) > 0$ se $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ne segue che f è crescente nell'intervallo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, decrescente nelle semirette $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Il punto $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è quindi di minimo locale mentre $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è di massimo locale. Valutiamo la funzione in tali punti:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{7/2}, \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{7/2}$$

quindi, in conseguenza dello studio della monotonia di f, si ottiene che $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3/2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3/2}$ sono rispettivamente il minimo e il massimo assoluto di f (quindi anche estremi inferiore e superiore).
Valutiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = 2xe^{4-x^2}(2x^2 - 3).$$

Per la convessità osserviamo che $f''(x) > 0$ se e solo se $x(2x^2 - 3) > 0$ cioè $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, quindi f è concava in $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, convessa in $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right]$, concava in $\left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ e convessa in $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.
I punti $x = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ x = 0,\ x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ sono punti di flesso.



Esercizio 3 Calcolare l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}\,dx$.

Soluzione

La funzione integranda è definita per i valori di $x > 0$ che non annullano il denominatore, cioè quando $\log x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Nel nostro intervallo tale condizione si verifica solo all'estremo destro dove risulta:

$$\lim_{x\to e^{\pi/2-}} \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)} = +\infty.$$

In tutto il resto dell'intervallo di integrazione la funzione è non negativa, pertanto l'integrale generalizzato esiste, finito o infinito. Cerchiamo una primitiva della funzione eseguendo la sostituzione $\log x = t$:

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}\,dx = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt|_{t=\log x} = -\log|\cos t| + C|_{t=\log x} = -\log|\cos(\log x)| + C$$

Ne segue che

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}\,dx = \lim_{M\to e^{\pi/2-}} \left[-\log|\cos(\log x)|\right]_1^M = \lim_{M\to e^{\pi/2-}} -\log(\cos(\log M)) + \log(\cos(\log 1)) =$$

$$= \lim_{t\to\pi/2^-} \log(\cos t) = \lim_{y\to 0^+} \log y = +\infty$$

l'integrale cercato quindi diverge positivamente.