Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 9 gennaio 2008

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cos n + 3n}{2n^2} =$$

A) $\frac{3}{2}$ B) non esiste C) 0 D) $+\infty$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 2 Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali positivi. Allora, necessariamente:

A) se $a_n < b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\sum_n (b_n - a_n)$ converge;

B) se $a_n < b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_n b_n$ converge, si ha che $\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n$;

C) se $a_n < b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_n a_n$ converge, si ha che $\sum_n (b_n - a_n)$ converge;

D) se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_n a_n$ converge, si ha che $\sum_n b_n$ converge.

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 3 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \arctan x$. Allora

A) f è limitata inferiormente; B) f ha massimo;

C) f è crescente; D) f non è derivabile in 0.

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 4 Quale delle seguente affermazioni è vera:

A) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx = 0$ B) $\int_{\pi/2}^{n\pi} \sin x\, dx = (-1)^{n+1}$

C) $\int_{0}^{+\infty} \sin x\, dx = +\infty$ D) $\int_{-\infty}^{-1} \sin x\, dx = -\infty$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 5 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e decrescente tale che $f(0) = 7$. Allora, necessariamente:

A) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ha un punto di minimo in 0; B) $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt \leq 7x^2$ per ogni $x > 0$;

C) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt > 0$ per ogni $x > 0$; D) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ è decrescente.

B

Domanda 6 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con un punto di minimo assoluto stretto in 0 e tale che $f(0) = 0$. Allora, necessariamente:

A) $\dfrac{f(x) - f(-x)}{2x} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; B) $f'(x) \geq 0\ \forall x > 0$ e $f'(x) \leq 0\ \forall x < 0$

C) $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2x} > 0\ \forall x > 0$; D) f non è limitata superiormente.

C

Domanda 7 La serie $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n+5}$

A) converge assolutamente B) converge

C) diverge D) è indeterminata

B

Domanda 8 $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{xe^x - x}{x \sin(2x)} =$

A) $+\infty$ B) 0 C) $\dfrac{1}{2}$ D) non esiste

C

Domanda 9 Sia $a_n = \dfrac{e^{n+1} \arctan(n^2)}{(n+1)\log(n+2)}$. Allora:

A) non esiste il limite di a_n; B) a_n è limitata superiormente;

C) a_n è decrescente; D) a_n è limitata inferiormente.

D

Domanda 10 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata inferiormente e crescente. Allora, necessariamente:

A) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; B) f ha almeno un punto di minimo;

C) $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$; D) $f(x) > \inf_{t \in \mathbb{R}} f(t) - 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.

D

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 9 gennaio 2008

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2-4}$ determinandone continutà, derivabilità, asintoti, punti di massimo e minimo locali e assoluti, monotonia, estremi superiore e inferiore.

Soluzione

La funzione è definita nei punti dove non si annulla il denominatore, quindi in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. La funzione è continua e derivabile in ogni punto del suo dominio in quanto quoziente di funzioni derivabili. Vediamo i limiti nei punti di frontiera del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{e^2}{0^+} + \infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{e^2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{e^{-2}}{0^-} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0^+$$

dove la forma di indeterminazione del primo limite può essere risolta utilizzando il teorema di de l'Hôpital, in quanto derivando due volte sia numeratore che denominatore si ottiene $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$. La funzione ha quindi due asintoti verticali di equazione rispettivamente $x = -2$ e $x = 2$ e un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ di equazione $y = 0$. Non ci sono asintoti obliqui, in quanto $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ (anche questo limite può essere ottenuto con il teorema di de l'Hôpital).
Calcoliamo ora la derivata di f per valutarne la monotonia.

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-x^2 - 2x + 4)}{(x^2-4)^2}.$$

Dato che la funzione esponenziale è sempre positiva, e il denominatore è un quadrato, il segno di f è determinato da quello di $-x^2 - 2x + 4$. Il trinomio si annulla per $x = -1 - \sqrt{5}$ e $x = \sqrt{5} - 1$, quindi $f'(x) < 0$ per i valori di x che appartengono al dominio di f e sono nell'intervallo $(-1-\sqrt{5}, \sqrt{5}-1)$, mentre è positiva al di fuori di tale intervallo. La f è decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{5})$, in $(\sqrt{5}-1, 2)$ e $(2, +\infty)$. La f è crescente in $(-1-\sqrt{5}, -2)$ e in $(-2, \sqrt{5}-1)$. Il punto $x = -1-\sqrt{5}$ è quindi di minimo locale mentre $x = \sqrt{5}-1$ è di massimo locale. L'estremo inferiore è $-\infty$ e quello superiore è $+\infty$, non ci sono quindi né massimo né minimo assoluti.

Esercizio 2 Dire se la funzione $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-4}$ è integrabile sull'intervallo $(0, 2)$.

Calcolare inoltre $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Soluzione

Osserviamo che
$$\frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x^3+1}{(x+2)(x-2)} \sim \frac{1}{x-2} \text{ per } x \to 2$$
quindi f non è integrabile (le due funzioni sono entrambe negative in un intorno sinistro di 2 e la seconda non è integrabile).
La funzione integranda è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$, quindi possiamo calcolarne l'integrale. Dividiamo il numeratore per il denominatore ottenendo che $x^3+1 = x(x^2-4)+4x+1$. Quindi:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \frac{4x+1}{x^2-4}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{2x}{x^2-4}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4} =$$

$$= \frac{1}{2} + 2\left[\log|x^2-4|\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{2} + 2(\log 3 - \log 4) + \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + 2\log 3 - 2\log 4 + \frac{1}{4}\log\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{7}{4}\log 3 - 2\log 4.$$

Esercizio 3 Sia $a_n = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{1/n^2} \cos x + \sin(2x)\,dx \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
Determinare il carattere della serie $\sum_n a_n$.

Soluzione

Osserviamo che
$$|a_n| = \sqrt{n}\left|\int_0^{1/n^2} \cos x + \sin(2x)\,dx\right| \leq \sqrt{n}\int_0^{1/n^2} |\cos x + \sin(2x)|\,dx \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\int_0^{1/n^2} |\cos x| + |\sin(2x)|\,dx \leq \sqrt{n}\,\frac{2}{n^2}$$

quindi
$$\sum_n |a_n| \leq 2\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$$
e l'ultima è una serie armonica di esponente maggiore di 1, quindi converge. La serie data pertanto converge assolutamente.