Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 18 settembre 2007

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia $f(x) = -|x|(3 - \sin x)$. Allora

A) f non ammette limite per $x \to -\infty$ B) $x = 0$ è punto di massimo assoluto per f su $\mathbb{R}$

C) $f'(0) = -2$ D) $y = -x$ è asintoto obliquo per f quando $x \to +\infty$

B

Domanda 2 Sia $f(x) = x^{\log x}$ definita per $x > 0$. Allora

A) f è concava B) f è limitata superiormente

C) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ D) f è decrescente

C

Domanda 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}}{n+n^{3/2}} =$$

A) $+\infty$ B) non esiste C) $\frac{3}{4}$ D) 0

D

Domanda 4 La successione $a_n = \frac{n!}{2^n}$ con $n > 1$ è:

A) limitata superiormente B) monotona crescente C) non ha limite D) infinitesima

B

Domanda 5 Sia $G(x) = \int_0^{x^3} \frac{e^t}{1+e^t}\, dt$. Allora

A) $G'(x) = \frac{e^{x^3}}{1+e^{x^3}}$ B) $G(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

C) $x = 0$ non è né punto di massimo né punto di minimo locale per G D) G è limitata in $\mathbb{R}$

C

Domanda 6 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ esiste finito B) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{f(t)}{t^2}\, dt = +\infty$

C) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^3}\, dt$ esiste D) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\, dt = 0$

C

Domanda 7 Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbf{Re}(z) > 0$. Allora, necessariamente

A) $\mathbf{Re}(z^2) > 0$ B) $\mathbf{Re}(z^2) \geq \mathbf{Re}(z)$

C) $|z| \geq \sqrt{|\mathbf{Re}(z^2)|}$ D) $(\mathbf{Re}(z))^2 - (\mathbf{Im}(z))^2 > 0$

C

Domanda 8 La serie $\displaystyle\sum_n \frac{\cos(n^2)}{n^{3/2}+1}$

A) è indeterminata B) converge assolutamente

C) converge semplicemente ma non assolutamente D) diverge

B

Domanda 9 Sia (a_n) una successione tale che $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Allora necessariamente:

A) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge B) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n^2}$ converge C) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n a_n^2}$ converge D) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2 a_n}$ converge

D

Domanda 10 Sia $z = a^2 - ib^2$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora

A) $\mathbf{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{b^2}{a^4+b^4}$ B) $|z|^2 = a^2 + b^2$ C) $\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{a^2}{b^2}$ D) $\arg z = \dfrac{-b}{a}$

A

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 18 settembre 2007

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Data la funzione $f(x) = \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ dire se è integrabile in senso generalizzato rispettivamente sugli intervalli $(0,+\infty)$ e $(0,1]$ e in caso affermativo calcolare il valore dell'integrale.

Soluzione

La f è definita e continua su tutto l'intervallo $(0,+\infty)$. Per $x \to \infty$ poniamo $t = \frac{1}{x}$ e utilizziamo lo sviluppo di Taylor della funzione logaritmo per $t \to 0^+$ ottenendo che $\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Osserviamo ora che f è positiva, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico alle funzioni $f(x)$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Essendo g non integrabile sulla semiretta $[1,+\infty)$ non lo è neanche f, a maggior ragione f non è integrabile su $(0,+\infty)$. Sull'intervallo $(0,1]$ invece la f non è limitata nell'intorno di 0. Di nuovo applichiamo il confronto asintotico utilizzando la funzione $h(x) = \log\frac{1}{x} = -\log x$. Infatti, risulta $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$. Per ottenere questo risultato si può applicare il teorema di de l'Hopital oppure osservare che $\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log\frac{1}{x} + \log(1+x)$. La funzione $h(x)$ è integrabile su $(0,1]$, quindi anche f lo è. Passiamo ora al calcolo dell'integrale. Dato $\varepsilon > 0$ risulta:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\varepsilon}^{1} \log(1+x) - \log x \, dx = \int_{\varepsilon+1}^{2} \log t \, dt - \int_{\varepsilon}^{1} \log x \, dx =$$

$$= [x\log x - x]_{\varepsilon+1}^{2} - [x\log x - x]_{\varepsilon}^{1} = 2\log 2 - 2 - (\varepsilon+1)\log(\varepsilon+1) + \varepsilon + 1 - (1\log 1 - 1 - \varepsilon\log\varepsilon + \varepsilon)$$

e questa quantità, quando ε tende verso 0 tende a $2\log 2$ che è il valore dell'integrale cercato.

Esercizio 2 Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Soluzione

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni $\sin t$ e $\log(1+t)$ per $t \to 0^+$:

$$\sin t = t + o(t^2), \qquad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Applichiamo ora questi sviluppi ponendo $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$ avendo osservato che per $n \to +\infty$, $t \to 0^+$. Allora otteniamo che:

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

In virtù del teorema sulla permanenza del segno si ottiene subito che il termine generale della serie è definitivamente positivo quindi possiamo applicare il teorema del confronto asintotico ottenendo che la serie è equivalente a una serie armonica, pertanto risulta divergente positivamente.

Esercizio 3 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + e^{1/x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

determinandone continuità, derivabilità, limiti, asintoti, massimi e minimi locali e assoluti, estremi superiore e inferiore, intervalli di monotonia e convessità e flessi.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per verificare la continuità basta osservare che e^{-x^2} è continua in tutto $\mathbb{R}$ quindi a maggior ragione nella semiretta $[0, +\infty)$. Analogamente la funzione $1 + e^{1/x}$ è continua nella semiretta $(-\infty, 0)$. Resta quindi solo da verificare la continuità di f in $x = 0$ che è garantita del fatto che

$$\lim_{x \to 0^-} 1 + e^{1/x} = 1 + 0 = f(0) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x^2}$$

Per la derivabilità vale un discorso analogo al precedente: basta verificarla in $x = 0$. Calcoliamo $f'(x)$ per $x > 0$:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

quindi, essendo f continua in $x = 0$ sarà:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

Per la derivata sinistra utilizziamo invece direttamente il limite del rapporto incrementale:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{-\frac{1}{t}} = -\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

dove abbiamo utilizzato la sostituzione $t = -\frac{1}{x}$. La f è quindi derivabile anche in $x = 0$ e la sua derivata vale 0. Valutiamo ora i limiti.

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + e^{1/x} = 1 + e^0 = 2, \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 2$ per $x \to -\infty$ e un altro asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$. Non ci sono asintoti verticali o obliqui. Studiamo ora il segno della derivata. Per $x > 0$ abbiamo già calcolato $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ che risulta strettamente negativa. Per $x < 0$ abbiamo:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} < 0$$

quindi la f è sempre decrescente. In $x = 0$ la derivata prima si annulla ma il punto non è né di massimo né di minimo locale. Non ci sono massimi e minimi assoluti (altrimenti sarebbero anche locali). L'estremo superiore vale 2 mentre quello inferiore vale 0 (segue dalla monotonia di f). Valutiamo ora la derivata seconda.

$$f''(x) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2) \qquad \text{per } x > 0$$

$$f''(x) = e^{1/x}\frac{2x+1}{x^4} \qquad \text{per } x < 0$$

Dallo studio del segno di f'' si ottiene che f è convessa sulla semiretta $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ e nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ mentre è concava nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e sulla semiretta $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Ne segue che i punti $-\frac{1}{2}$, 0 e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di flesso.