Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 17 luglio 2007

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Dati $z, w \in \mathbb{C}$ tali che $\dfrac{z}{w} = |z|^2$ allora, necessariamente:

A) $w = \overline{z}$ B) $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ C) $|w| = |z|$ D) $w^2 = \dfrac{1}{z}$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 2 La successione $a_n = e^{n^2} - n^2$:
A) è strettamente crescente e limitata superiormente
B) è strettamente decrescente e limitata inferiormente

C) non è limitata superiormente D) non è limitata inferiormente

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 3 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua tale che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. Allora, necessariamente:
A) $\sup f = 1$ B) f è crescente

C) f è limitata D) f non ha punti di minimo assoluto

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 4 Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sin x} f(t)\, dt$ dove f è una funzione positiva e continua in tutto $\mathbb{R}$. Allora:
A) $F(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ B) $F(x)$ ha un minimo locale in $x = \pi$

C) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$ D) F è decrescente

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 5 La serie $\displaystyle\sum_n n \sin \frac{1}{n^2}$
A) è indeterminata B) converge assolutamente C) diverge

D) converge semplicemente ma non assolutamente

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 6 L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \tan x \leq 1\}$:
A) è limitato superiormente B) è un intervallo

D

C) è limitato inferiormente D) contiene tutti i suoi punti di accumulazione reali

Domanda 7 L'equazione $\sqrt[5]{z^{10}} = 1,\ z \in \mathbb{C}$ ha:
A) infinite soluzioni B) 5 soluzioni

D

C) 10 soluzioni due a due coniugate D) 2 soluzioni reali

Domanda 8 Si consideri la successione $a_n = \dfrac{(-1)^n \log(1+n)}{\sqrt{n+2}}$. Allora

C

A) $\sup a_n = 0$ B) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ C) (a_n) è limitata D) (a_n) è decrescente

Domanda 9 Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^2 tale che $f'(0) = 0$.
Allora:
A) f assume il suo massimo assoluto nel punto $x = 0$ B) $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in [0, +\infty)$

B

C) f è una funzione non negativa in $[0, +\infty)$ D) f è limitata superiormente

Domanda 10 Sia $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ tale che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Allora, necessariamente

A) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)^\alpha}\, dx < \infty$ per $\alpha > 1$ B) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha f(x)}\, dx < \infty$ per $\alpha > 1$

C) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + f(x)}\, dx < \infty$ per $\alpha > 1$

C

D) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}\, dx < \infty$ per $\alpha > 1$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 17 luglio 2007

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Sia $f(x) = \dfrac{x^{-4}}{\log\left(1 + e^{5x}\right)}$. Calcolare i limiti di $f(x)$ quando x tende rispettivamente a $-\infty$, $+\infty$ e a 0 da destra e da sinistra.

Soluzione

Per $x \to -\infty$ il limite è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Utilizziamo lo sviluppo di Taylor della funzione logaritmo: $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0^+$ sostituendo $t = e^{5x}$ dopo aver osservato che per $x \to -\infty$ risulta $e^{5x} \to 0^+$. Quindi:

$$f(x) = \frac{x^{-4}}{e^{5x} + o\left(e^{5x}\right)} = \frac{e^{-5x}x^{-4}}{1 + o(1)}$$

Ne segue che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-5x}}{x^4} = +\infty$$

dove l'ulitmo limite si può ottenere, ad esempio, applicando il teorema di de l'Hôpital ripetutamente. Gli altri limiti sono molto più semplici, infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{+\infty}{\log 2} = +\infty$$

sia da destra che da sinistra.

Esercizio 2 Calcolare la primitiva della funzione $f(x) = e^x \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ che vale $\log\left(\dfrac{e-1}{e+1}\right)$ nel punto $x = 1$.

Soluzione

Ricordando la definizione delle funzioni iperboliche abbiamo:

$$\int f(x)\,dx = \int e^x \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$$

eseguiamo ora la sostiuzione $e^x = t$, $dt = e^x\, dx$ ottenendo l'integrale

$$\int \frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}\, dt = \int \frac{t^2+1}{t^2-1}\, dt = \int 1 + \frac{2}{t^2-1}\, dt = t + \int \frac{2}{(t+1)(t-1)}\, dt$$

Eseguiamo ora l'integrazione della funzione razionale $\dfrac{2}{(t+1)(t-1)}$ determinando due numeri reali A, B tali che:

$$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A - B}{(t+1)(t-1)}$$

Risolviamo quindi il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = 1,\ B = -1$. Ne segue che

$$\int \frac{2}{(t+1)(t-1)}\, dt = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c$$

L'integrale indefinito di f sarà quindi, tenendo conto della sostituzione fatta:

$$t + \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = e^x + \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$$

Ricaviamo ora la costante c imponendo che la primitiva valga $\log\left(\dfrac{e-1}{e+1}\right)$ per $x = 1$:

$$\log\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = f(1) = e + \log\left(\frac{e-1}{e+1}\right) + c$$

quindi $c = -e$ e la primitiva cercata è:

$$e^x + \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| - e$$

Esercizio 3 Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0$, la serie

$$\sum_n \left(\cos\frac{1}{n^{2\alpha}} - 1\right) n^{1-\alpha}$$

converge.

Soluzione

Per $\alpha = 0$ il termine generale della serie diventa $(\cos 1 - 1)n$ che tende a $-\infty$. Quindi viene a mancare la condizione necessaria per la convergenza.

Se invece $\alpha > 0$ si ha che $\dfrac{1}{n^{2\alpha}} \to 0$ quindi possiamo utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione coseno

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \text{ con } t = \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

ottenendo per il termine generale della serie:

$$\left(\cos\frac{1}{n^{2\alpha}} - 1\right) n^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{2n^{4\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{6\alpha}}\right)\right) n^{1-\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{n^{4\alpha}} = \frac{1}{n^{5\alpha-1}}$$

quindi la serie è asintoticamente equivalente ad una serie armonica di esponente $5\alpha - 1$ che converge se e solo se $5\alpha - 1 > 1$ cioè se $\alpha > \frac{2}{5}$. Riassumendo la serie data converge se e solo se $\alpha > \frac{2}{5}$.