Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 26 giugno 2007

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 $\dfrac{\log_3 81}{\log_3 \sqrt{3}} =$

A) $\dfrac{7}{2}$ B) 8 C) $\log_3 81 - \log_3 \sqrt{3}$ D) $\log_3(81 - \sqrt{3})$

B

Domanda 2 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ di classe C^1, sia $F(x) = \int_2^x t^2 f(t)$. Allora, necessariamente

A) F è crescente in $\mathbb{R}$ B) esiste finito $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ C) $F(0) = 0$ D) F è concava in $\mathbb{R}$

A

Domanda 3 La successione $a_n = \log \sqrt{n} - 2n, \; n \geq 1$

A) non ha limite B) è decrescente e $\inf_n a_n = -\infty$

C) è decrescente e $\inf_n a_n = \log 5 - 10$ D) è crescente e $\sup_n a_n = +\infty$

B

Domanda 4 Sia $z = \dfrac{1-i}{1+i}$ Allora

A) $\mathbf{Re}(z) = 1$ B) $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $z = -i$ D) $\arg z = \pi$

C

Domanda 5 Sia $f(x) = 5x - \dfrac{x}{\log^2 x}$ Allora

A) $y = 5$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ B) non esiste $\lim_{x\to 1} f(x)$

C) f non ha asintoti obliqui D) $y = 5x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

C

Domanda 6 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ poniamo $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$. Allora, necessariamente

A) $G'(x) = f(2x)$ B) $G'(x) = f(x^2) - f(0)$ C) G ha un punto di minimo per $x = 0$

D) $G(x) > 0$ per $x > 0$ e $G(x) < 0$ per $x < 0$

C

Domanda 7 La serie $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \ \sin \frac{1}{n^3}$

A) diverge positivamente B) è indeterminata C) converge D) è a segni alterni

C

Domanda 8 La disequazione $|z - i|^2 \leq 4, \ z \in \mathbb{C}$

A) ha due sole soluzioni non reali B) ha una sola soluzione reale

C) ha infinite soluzioni reali D) non ha nessuna soluzione reale

C

Domanda 9 Si consideri la successione $a_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n}{n \log n}$, $n \geq 2$. Allora

A) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ B) a_n non è limitata inferiormente C) esiste finito $\lim_{n\to\infty} a_n$

D) da (a_n) si possono estrarre due sottosuccessioni convergenti a limiti diversi

C

Domanda 10 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $f(2) = 2$ e $f'(2) = 3$.
Allora $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 2}{2x - 1}$

A) vale $\dfrac{3}{2}$ B) vale 0 C) non esiste D) vale $+\infty$

B

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 26 giugno 2007

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

Esercizio 1 Dire se converge il seguente integrale generalizzato ed eventualmente calcolarne il valore

$$\int_0^{1/e^2} \frac{1}{x + x\log^3 x}\, dx$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda è continua sull'intervallo $\left(0, \frac{1}{e^2}\right]$ dato che il denominatore si annulla solo per $x = 0$ e $x = \frac{1}{e}$. Applicando ripetutamente il teorema di de l'Hôpital si ottiene che $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log^3 x = 0$, quindi la funzione non è limitata nell'intorno di 0. Per quello che riguarda la convergenza dell'integrale, basta quindi verificare se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/e^2} \frac{1}{x + x\log^3 x}\, dx$$

Eseguiamo la sostituzione $y = \log x$ ottenendo che

$$\int_\varepsilon^{1/e^2} \frac{1}{x + x\log^3 x}\, dx = \int_{\log\varepsilon}^{-2} \frac{1}{1+y^3}\, dy$$

Dato che $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \log\varepsilon = -\infty$, l'integrale dato convergerà se e solo se convergerà l'integrale

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{1+y^3}\, dy$$

Dato che $\frac{1}{1+y^3} \sim \frac{1}{y^3}$ per $y \to -\infty$ per il criterio del confronto asintotico l'integrale converge. Cerchiamo ora una primitiva della funzione razionale $\frac{1}{1+y^3}$. Il denominatore ha una radice reale e due complesse coniugate e si fattorizza nel seguente modo:

$$1 + y^3 = (1 + y)(y^2 - y + 1)$$

Cerchiamo quindi tre coefficienti $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che risulti:

$$\frac{1}{1+y^3} = \frac{A}{1+y} + \frac{By + C}{y^2 - y + 1}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}$. Quindi

$$\int \frac{1}{1+y^3}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+y} + \int \frac{-\frac{y}{3}+\frac{2}{3}}{y^2-y+1}\,dy = \frac{1}{3}\log|1+y| - \frac{1}{6}\int \frac{2y-4}{y^2-y+1}\,dy =$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+y| - \frac{1}{6}\log(y^2-y+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2-y+1} = \frac{1}{6}\log\frac{(1+y)^2}{y^2-y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{1}{2}\right)\right) + c$$

Quindi

$$\int_0^{1/e^2} \frac{1}{x+x\log^3 x}\,dx = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{1+y^3}\,dy = \lim_{r\to-\infty}\int_r^{-2} \frac{1}{1+y^3}\,dy =$$

$$= \lim_{r\to-\infty}\left[\frac{1}{6}\log\frac{(1+y)^2}{y^2-y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_r^{-2} =$$

$$= \frac{1}{6}\log\frac{1}{7} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{-5}{\sqrt{3}} - \lim_{r\to-\infty}\left(\frac{1}{6}\log\frac{(1+r)^2}{r^2-r+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(r-\frac{1}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\log 7 - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Esercizio 2 Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n(\log n)^\alpha}} - 1\right)(\log n)^{2-\alpha}$$

Soluzione

Per prima cosa notiamo che la serie è definita per $n \geq 2$ ed è a termini positivi. Osserviamo inoltre che per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $\lim\limits_n \frac{1}{n(\log n)^\alpha} = 0$, quindi ponendo $t = \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ e ricordando che $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ si ottiene che

$$\left(\sqrt{1+\frac{1}{n(\log n)^\alpha}} - 1\right)(\log n)^{2-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2n(\log n)^\alpha} - 1 + o\left(\frac{1}{n(\log n)^\alpha}\right)\right)(\log n)^{2-\alpha} \sim$$

$$\sim \frac{1}{n(\log n)^\alpha}(\log n)^{2-\alpha} = \frac{1}{n(\log n)^{2\alpha-2}}$$

Ricordiamo ora che (applicando ad esempio il criterio dell'integrale) le serie del tipo

$$\sum_n \frac{1}{n(\log n)^\beta}$$

covergono per $\beta > 1$. Per il criterio del confronto asintotico avremo quindi che la serie data converge per $2\alpha - 2 > 1$ cioè per $\alpha > \frac{3}{2}$.

Esercizio 3 Sia $F(x) = 1 - \int_1^x t\,e^{-t^2}\,dt$. Determinare l'insieme di definizione, i limiti, la monotonia massimi e minimi locali e assoluti, estremi superiore e inferiore, convessità e punti di flesso di F.

Soluzione

La funzione integranda è continua e definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ quindi anche la F, che ne è una primitiva, è definita su tutta la retta reale e risulta almeno di calsse C^1. Osserviamo che è possibile calcolare F esplicitamente, infatti:

$$F(x) = 1 - \left[\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_1^x = 1 + \frac{e^{-x^2} - e^{-1}}{2}$$

e da questo tipo di espressione si vede subito che F è pari. Sarà quindi sufficiente studiare F sulla semiretta $[0, +\infty)$ e simmetrizzarne il grafico. Calcoliamo il limite all'infinito:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 - \frac{1}{2e}$$

quindi F ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1 - \frac{1}{2e}$. Vediamo ora la derivata:

$$F'(x) = -xe^{-x^2}$$

che è positiva se e solo se $x < 0$ (dato che la funzione esponenziale assume sempre valori positivi). Quindi la F è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0]$ e decrescente sulla semiretta $[0, +\infty)$; ne segue che $x = 0$ è un punto di massimo assoluto e $F(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2e}$ è il massimo della funzione. Per lo stesso motivo l'estremo inferiore è $1 - \frac{1}{2e}$. Per la convessità studiamo il segno della derivata seconda (la F è di classe C^∞):

$$F''(x) = -e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$$

quindi $F''(x) > 0$ se e solo se $1-2x^2 < 0$ cioè $x^2 > \frac{1}{2}$ che è verificata per $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. La F è quindi convessa in ciascuna di queste due semirette e concava nell'intervallo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. I punti $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di flesso per F.