Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 6 giugno 2007

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia S l'insieme $\left\{ \dfrac{1}{\log n} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2 \right\}$. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

B

A) $\sup(S) = +\infty$ B) $\inf(S) = 0$ C) $\inf(S) = -\infty$ D) $\sup(S) = 0$

Domanda 2 Dato $z \in \mathbb{C}$ sia $w = e^{iz}$. Allora $\overline{w} =$

C

A) $e^{\overline{z}}$ B) $e^{1/z}$ C) $e^{-i\overline{z}}$ D) e^{-z}

Domanda 3 Sia (a_n) una successione tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Allora $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(1+a_n^2)}{a_n^2} =$

C

A) 1 B) $+\infty$ C) 0 D) dipende da (a_n)

Domanda 4 Sia $f(x) = x - \log x$ definita in $(0, +\infty)$. Allora

A) f ha un asintoto orizzontale B) f non ha asintoti obliqui

B

C) f non ha asintoti verticali D) f è limitata superiormente

Domanda 5 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e pari. Allora, necessariamente:

A) $x = 0$ è punto di minimo relativo per f B) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

C

C) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ D) $\int_{2}^{-2} f(-x)\,dx < 0$

Domanda 6 Sia $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$. Allora $|z|^3 =$

C

A) $z\,|z|^2$ B) $a^3 + b^3$ C) $z\,|z|\,\overline{z}$ D) $a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3$

Domanda 7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos n}{-n^2} =$

A

A) 0 B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $-\infty$ D) non esiste

Domanda 8 Sia $f(x) = x^2 \log x$. Per $x \to 0^+$, $f(x)$ è:
A) $o(x^2)$ B) un infinitesimo di ordine 1 rispetto a x

D

C) un infinitesimo di ordine 2 rispetto a x D) $o(x)$

Domanda 9 Sia $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ una funzione continua. Allora, necessariamente:

A) $\int\limits_2^3 f(x)\,dx = +\infty$ B) se, per $x \to 0^+$, $f(x) \sim \dfrac{x}{x^{4/3} + x^3}$ allora $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$ esiste ed è finito

B

C) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ esiste ed è finito D) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = +\infty$

Domanda 10 Il numero $\dfrac{5^{1/4}}{5^{-1/3}}$ è uguale a:
A) $\dfrac{1}{5^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}$ B) $\dfrac{1}{5^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}}$

B

C) $5^{1/4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/3}$ D) $5^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}$

Esercizio 1 Calcolare il limite della successione $a_n = \dfrac{\log(1+n)}{\log n}, \quad n \geq 2$ e determinarne l'estremo superiore.

Soluzione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)}{\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n(1+1/n))}{\log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n} = 1.$$

Osserviamo che la successione $\{a_n\}_n$ è decrescente. Infatti $a_n = 1 + \dfrac{\log(1+1/n)}{\log n}$. La successione $\{\log(1+1/n)\}_n$ risulta decrescente, essendo il logaritmo una funzione crescente e la successione $(1+1/n)$ decrescente. Invece $\{\log n\}_n$ è crescente e tutte le successioni in questione sono positive, quindi $\{a_n\}_n$ è decrescente. L'estremo superiore risulta dunque $\dfrac{\log 3}{\log 2}$.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x) = 2\,x + \sqrt{x^2 - 1}$$

determinarne insieme di definizione, asintoti, intervalli di monotonia, massimi e minimi (specificando quali sono relativi e quali assoluti), convessità e tracciarne un grafico qualitativo.

Soluzione

La funzione è definita in $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2\,x + \sqrt{x^2-1})\,(-2\,x + \sqrt{x^2-1})}{(-2\,x + \sqrt{x^2-1})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3\,x^2 - 1}{(-2\,x + \sqrt{x^2-1})} = -\infty.$$

Quindi non ci sono né punti di massimo né punti di minimo assoluti. Risulta inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3\,x = \lim_{x\to+\infty} -x + \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x + \sqrt{x^2-1})\,(x + \sqrt{x^2-1})}{(x + \sqrt{x^2-1})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{(x + \sqrt{x^2-1})} = 0$$

Quindi $y = 3\,x$ è asintoto obliquo destro. Analogamente si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 0,$$

quindi $y = x$ è asintoto obliquo sinistro. Per determinare eventuali massimi o minimi locali calcoliamo

$$f'(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Quindi $f'(x) = 0$ per $x = -\sqrt{4/3}$ e $f'(x) > 0$ su $(-\infty, -\sqrt{4/3})$ e $(1, +\infty)$. La funzione risulta dunque crescente su $(-\infty, -\sqrt{4/3})$ e $(1, +\infty)$, mentre risulta decrescente su $(-\sqrt{4/3}, -1)$. La funzione ha un punto di massimo relativo in $x = -\sqrt{4/3}$. Inoltre ha due punti di minimo relativo in $x = 1$ e in $x = -1$, nei quali la funzione non è derivabile. In particolare $\lim_{x\to1} f'(x) = +\infty$ mentre $\lim_{x\to-1} f'(x) = -\infty$. Per la convessità calcoliamo la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)} < 0.$$

Quindi f è concava sulle semirette $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$.