Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'Ambiente e Territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 12 febbraio 2007

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Sia γ la curva che ha per sostegno l'insieme

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - \arctan\left((x-1)^\alpha\right) = 0, \quad 1 \le x \le 3\right\}$$

Trovare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la retta tangente a γ nel punto $P = \left(2, \dfrac{\pi}{8}\right)$ è ortogonale alla retta di equazione $2x + y = 5$.

Soluzione

La curva γ può essere parametrizzata in questo modo:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}\arctan\left((t-1)^\alpha\right) \end{pmatrix} \qquad t \in [1,3]$$

La sua velocità risulta

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{\alpha(t-1)^{\alpha-1}}{2\left(1+(t-1)^{2\alpha}\right)} \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora per quale valore del parametro t la curva passa per il punto P risolvendo l'equazione $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi/8 \end{pmatrix}$ che ha come soluzione $t = 2$. Quindi, la velocità della curva nel punto P sarà

$$\dot\gamma(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha/4 \end{pmatrix}$$

La retta $2x + y = 5$ ha $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ come vettore direzione , quindi la direzione ortogonale sarà $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quest'ultimo vettore dovrà essere multiplo di $\dot\gamma(2)$, quindi cercheremo $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha/4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che ha come soluzione $\lambda = \dfrac{1}{2}$ e $\alpha = 2$.

Esercizio 2

Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{y(x^2+y^2-2x)e^x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx + \frac{(x^2-y^2)\,e^x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dy$$

Trovare l'insieme di definizione di ω. Dire inoltre se ω è esatta e su quale insieme. Calcolare infine $\int\limits_\gamma \omega$ dove γ è la curva che ha per sostegno l'insieme

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 - 1 = 0,\ -1 \le y \le 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \le 0\right\}$$

Soluzione

La forma differenziale è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcolando le derivate incrociate si ottiene:

$$Y_x = \frac{e^x\,(x^4 - y^4 + 6xy^2 - 2x^3)}{(x^2+y^2)^3} = X_y$$

La forma ω è quindi chiusa. Il dominio di definizione tuttavia non è semplicemente connesso e per verificare l'esattezza di ω occorre calcolarne l'integrale curvilineo su una curva che giri intorno alla lacuna. Prendiamo ad esempio la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Allora

$$\int\limits_\alpha \omega = \int\limits_0^{2\pi} \sin t(1-2\cos t)e^{\cos t}(-\sin t) + (\cos^2 t - \sin^2 t)e^{\cos t}\cos t\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos t}(-\sin^2 t + \sin^2 t\cos t + \cos^3 t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos t}(\cos t - \sin^2 t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos t\,dt + \int\limits_0^{2\pi} \sin t(-\sin t e^{\cos t})\,dt = \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos t\,dt + \left[e^{\cos t}\sin t\right]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos t\,dt = 0$$

dove l'ultima integrazione è stata eseguita per parti. La forma differenziale ω è quindi esatta in tutto il suo dominio di definizione. Osserviamo ora che la curva γ è di classe C^1 a tratti, ottenuta unendo una semicirconferenza e un arco di parabola. Tale curva è chiusa e contenuta nel dominio di ω quindi $\int\limits_\gamma \omega = 0$.

Esercizio 3

Si determinino l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{(\sin x)^n + 3}{5 + x^{4n}}$$

Dire inoltre se la convergenza è uniforme sull'intervallo $(1, 2]$.

Soluzione

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} |(\sin x)^n| = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{4n} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 1 & \text{se } |x| = 1 \\ +\infty & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1/2 & \text{se } x = \pm 1 \\ 3/5 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

L'insieme di convergenza puntuale è quindi $\mathbb{R}$ e la funzione limite è:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1/2 & \text{se } x = \pm 1 \\ 3/5 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

Proviamo ora che la successione non converge uniformemente sull'intervallo $(1, 2]$. Se così fosse varrebbe il teorema sullo scambio del limite nel punto $x_0 = 1$. Invece si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^+} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sin 1)^n + 3}{5 + 1^n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$$

e i due limiti non sono uguali.

Esercizio 4

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{n^2(x-2)^n}{3n^3+1}$$

Soluzione

La serie in questione è una serie di potenze di centro 2. Dato che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{n^2}{3n^3+1}\right|}=\frac{1}{3}$$

utilizzando il criterio di Cauchy – Hadamard si ottiene che il raggio di convergenza è $R = 3$. La serie pertanto converge assolutamente per le x tali che $2-3 < x < 2+3$ cioè nell'intervallo $(-1, 5)$. Controlliamo ora l'eventuale convergenza negli estremi. Per $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{n^2}{3n^3+1}(-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3+1}$$

Poiché $\dfrac{n^2}{3n^3+1} \sim \dfrac{1}{3n}$ la serie si comporta come una serie armonica divergente. Invece per $x = 5$ otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{n^2}{3n^3+1}3^n=\sum_{n=0}^{n}(-1)^n\frac{n^2}{3n^3+1}$$

che è una serie a segni alterni. Verifichiamo se il valore assoluto del termine generale è non crescente e infinitesimo. Per la monotonia basta verificare che definitivamente risulta

$$\frac{(n+1)^2}{3(n+1)^3+1}\leq\frac{n^2}{3n^3+1}$$

e, sviluppando le potenze si ottiene la disuguaglianza equivalente

$$0 < 3n^4+6n^3+3n^2-2n$$

che è sicuramente vera per n abbastanza grande, grazie al teorema sulla permanenza del segno e al fatto che

$$\lim_{n\to\infty} 3n^4+6n^3+3n^2-2n=+\infty$$

Osserviamo ora che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^3+1}=0$$

quindi la successione è anche inifinitesima. Ne segue che possiamo applicare il criterio di Leibnitz e concludere che la serie converge nel punto 5. L'insieme di convergenza puntuale è quindi l'intervallo $(-1, 5]$ mentre quello di convergenza assoluta è $(-1, 5)$.