Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'Ambiente e Territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 26 gennaio 2007

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}}\,ds$ dove $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t^2 \\ -t \end{pmatrix}$, $\quad t \in [-2, 2]$.

Soluzione

Calcoliamo il modulo della velocità di γ:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad |\dot\gamma(t)| = \sqrt{2+4t^2}$$

Quindi

$$\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}}\,ds = \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2+t^2}}\sqrt{2+4t^2}\,dt = \sqrt{2}\int_{-2}^{2} 1-t^2\,dt = 2\sqrt{2}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(2-\frac{8}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Esercizio 2

Data la forma differenziale lineare $\omega(x,y) = \left(\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right) dx - \left(\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} + \log y\right) dy$ trovarne l'insieme di definizione e verificare che la forma è esatta specificando in quale insieme. Determinare inoltre la primitiva che nel punto $\left(\frac{4}{\pi}, 1\right)$ vale 3.

Soluzione

La forma è definita per $x \neq 0$ e $y > 0$, quindi sull'unione dei due insiemi

$$\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0\right\} \qquad \Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}$$

Indicando con X e Y le due componenti della forma, calcoliamo le derivate incrociate:

$$X_y = \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x} = Y_x$$

quindi la forma è chiusa. Dato che sia Ω_1 che Ω_2 sono insiemi semplicemente connessi (in quanto prodotti di intervalli), si ha che ω è esatta in ciascuno dei due insiemi (ma non sulla loro unione che non è connessa). Cerchiamo ora una primitiva U in Ω_2, dato che $\left(\frac{4}{\pi}, 1\right) \in \Omega_2$.

$$U(x,y) = \int \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\, dx + \phi(y) = \cos\frac{y}{x} + \phi(y)$$

con ϕ funzione da determinare. Derivando rispetto a y si ha:

$$U_y = -\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} + \phi'(y)$$

e tale funzione deve essere uguale a Y, quindi:

$$-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} + \phi'(y) = -\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x} - \log y$$

Ne segue che

$$\phi'(y) = -\log y$$

quindi, integrando rispetto a y:

$$\phi(y) = -\int \log y\, dy + c = -y\log y + y + c \quad \text{e} \quad U(x,y) = \cos\frac{y}{x} - y\log y + y + c.$$

Determiniamo ora la costante c sapendo che la funzione vale 3 nel punto $\left(\frac{4}{\pi}, 1\right)$.

$$3 = U\left(\frac{4}{\pi}, 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1\log 1 + 1 + c = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + c$$

e, risolvendo l'equazione:

$$c = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Allora la primitiva cercata è:

$$U(x,y) = \cos\frac{y}{x} - y\log y + y + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 3

Calcolare, giustificando la risposta

$$\int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^2 \left(\frac{1}{1+x^3}\right)^n dx$$

Soluzione

Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^2 \left(\frac{1}{1+x^3}\right)^n$ e studiamone la convergenza nell'intervallo $[1,2]$. Osserviamo che

$$\sup_{x\in[1,2]} \left|(n-1)x^2 \left(\frac{1}{1+x^3}\right)^n\right| \le 4(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

è convergente per il criterio della radice, essendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$$

Ne segue che la serie di funzioni converge totalmente e quindi uniformemente, nell'intervallo $[1,2]$. Possiamo quindi integrare per serie ottenendo:

$$\int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^2 \left(\frac{1}{1+x^3}\right)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 (n-1)x^2 \left(\frac{1}{1+x^3}\right)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^3}\right)^{n-1}\right]_1^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m - \left(\frac{1}{9}\right)^m = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{1}{3}\left(2-\frac{9}{8}\right) = \frac{7}{24}$$

Esercizio 4

Trovare l'area della superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0,\ 2 \le z \le 4,\ y \ge x \right\}$$

Soluzione

La superficie è una porzione di cono con asse coincidente con l'asse z. Dall'equazione $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=0$ si ottiene $z = \pm 2\sqrt{x^2+y^2}$ e la soluzione negativa è da scartare essendo $z \ge 2$. Parametrizziamo Σ in questo modo:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\rho \end{cases}$$

quindi la parametrizzazione sarà:

$$\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ 2\rho \end{pmatrix}$$

e il dominio D di ϕ si ricava dalle disuguaglianze che definiscono Σ:

$$2 \le z \le 4 \implies 1 \le \rho \le 2$$

$$y \ge x \implies \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{5}{4}\pi$$

$$D = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{5}{4}\pi \right\}$$

La matrice jacobiana della funzione ϕ e il vettore normale a Σ risultano:

$$J\phi(\rho\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} -2\rho\cos\theta \\ -2\rho\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}$$

quindi

$$|N| = \sqrt{4\rho^2\cos^2\theta + 4\rho^2\sin^2\theta + \rho^2} = \sqrt{5}\rho$$

L'area di Σ è quindi:

$$\int_D \sqrt{5}\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\theta \int_1^2 \rho\, d\rho = \sqrt{5}\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\sqrt{5}\pi$$