Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'Ambiente e Territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 9 gennaio 2007

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Verificare che le curve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix} \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \\ \cosh t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

sono equivalenti. Dire inoltre se sono curve regolari.

Soluzione

Per provare l'equivalenza è sufficiente trovare una funzione $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ invertibile tale che $\alpha(t) = \gamma(\phi(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. La ϕ dovrà quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \sinh t = \phi(t) \\ \cosh t = \sqrt{1 + (\phi(t))^2} \end{cases}$$

che è automaticamente verificato grazie all'uguaglianza $\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t}$. Osserviamo ora che ϕ è derivabile e che $\phi'(t) = \cosh t > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ quindi ϕ è strettamente monotona e pertanto invertibile. Questo dimostra l'equivalenza fra γ e α. Vediamo ora la regolarità calcolando le velocità delle due curve.

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\alpha}(t)| = \cosh^2 t + \sinh^2 t = 1 + 2\sinh^2 t > 0, \qquad |\dot{\gamma}(t)| = 1 + \frac{t^2}{1+t^2} > 0$$

quindi entrambe le curve sono regolari.

Esercizio 2

Calcolare l'integrale doppio $\int\limits_D 2y\,dx\,dy$ dove D è l'insieme che ha per frontiera parte dell'asse x e il sostegno della curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$. Si consiglia l'uso delle formule di Gauss – Green.

Soluzione

Osserviamo, anche se non è necessario per la soluzione dell'esercizio, che il sostegno della curva γ è un arco di cicloide. In particolare si consideri che $1 - \cos t \geq 0$ quindi il sostegno di γ è tutto contenuto nel semipiano $y \geq 0$ e che $D(t - \sin t) = 1 - \cos t > 0$ per ogni $t \in (0, 2\pi)$, quindi γ è una curva semplice. Questo garantisce che l'insieme D è ben definito.
Dalle formule di Gauss – Green otteniamo che

$$\int\limits_D 2y\,dx\,dy = \int\limits_D \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial^+ D} y^2\,dx$$

Osserviamo ora che la frontiera di D è formata da due curve: $\hat{\gamma}$ e α dove $\hat{\gamma}$ è la curva γ percorsa nel verso opposto e α è la parte dell'asse x compresa fra 0 e 2π. La funzione integranda y^2 è nulla sul sostegno della curva α, quindi

$$-\int\limits_{\partial^+ D} y^2\,dx = -\int\limits_{\hat{\gamma}} y^2\,dx = \int\limits_{\gamma} y^2\,dx$$

Per calcolare questo integrale ricaviamo la velocità di γ:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

quindi

$$\int\limits_{\gamma} y^2\,dx = \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} 1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\,dt =$$

$$= 2\pi - 3\left[\sin t\right]_0^{2\pi} + 3\pi - \int\limits_0^{2\pi} \cos t (1 - \sin^2 t)\,dt = 5\pi - \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 5\pi.$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale superficiale $\displaystyle\int_\Sigma \sqrt{1+x^2+y^2}\, d\sigma$ dove Σ è la supeficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1,\ 0 \le z \le \sqrt{10}\right\}$$

Soluzione

La superficie Σ è una porzione di iperboloide. Ricaviamo la variabile z dall'equazione implicita di Σ:

$$z = \pm\sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

dato che deve essere $z \ge 0$. La superficie quindi è di tipo cartesiano, grafico della funzione $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Dobbiamo trovare ora il dominio di base. Dal sistema di disuguaglianze $0 \le z \le \sqrt{10}$ ricaviamo

$$0 \le \sqrt{1+x^2+y^2} \le \sqrt{10}$$

quindi $x^2+y^2 \le 9$. Quindi il dominio da considerare per la funzione f sarà il disco di centro l'origine e raggio 3:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 9\right\}$$

Determiniamo ora il gradiente di f:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Il modulo del vettore normale alla superficie sarà quindi:

$$|N| = \sqrt{1+|\nabla f|^2} = \sqrt{\frac{1+2(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}}$$

Allora l'integrale superficiale cercato è:

$$\int_\Sigma \sqrt{1+x^2+y^2}\, d\sigma = \int_D \sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{\frac{1+2(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_D \sqrt{1+2(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

e utilizzando le coordinate polari:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \sqrt{1+2\rho^2}\, \rho\, d\rho = 2\pi\left[\frac{1}{6}(1+2\rho^2)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{\pi}{3}\left(19^{3/2}-1\right).$$

Esercizio 4

Trovare l'insieme di convergenza puntuale della successione di funzioni $f_n(x) = x^2 n^3 (1-x)^n$. Determinare inoltre la funzione limite e dire se la convergenza è uniforme sull'insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} (1-x)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x < 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

quindi, tenendo conto del fatto che $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ +\infty & \text{se } x < 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

L'insieme di convergenza puntuale della successione è $[0,2)$ e la funzione limite è $f(x) = 0$. Per verificare l'eventuale convergenza uniforme sull'insieme $[0,2)$ dobbiamo calcolare

$$\sup_{x\in[0,2)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2)} \left| x^2 n^3 (1-x)^n \right| \geq \lim_{x\to 2^-} \left| x^2 n^3 (1-x)^n \right| = 4n^3$$

Ma $\lim\limits_{n\to\infty} 4n^3 = +\infty$, quindi per il teorema del confronto anche

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,2)} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$$

e la convergenza non è uniforme.