Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'Ambiente e Territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 18 settembre 2006

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Si consideri la successione di funzioni definita sull'intervallo $[0,1]$ nel seguente modo:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ -4(n^2+1)x^2 + \dfrac{8(n^2+1)}{n}x - \dfrac{3(n^2+1)}{n^2} & \text{se } \ \dfrac{1}{2n} < x \le \dfrac{3}{2n} \\ 0 & \text{se } \ \dfrac{3}{2n} < x \le 1 \end{cases}$$

Trovare la funzione limite, l'insieme di convergenza puntuale della successione e dire se in tale insieme c'è anche convergenza uniforme.

Soluzione

Osserviamo che per ogni fissato $x \in (0,1]$ esiste $\bar{n}$ tale che se $n \ge \bar{n}$ allora $\dfrac{3}{2n} < x$, quindi se $n \ge \bar{n}$ risulta $f_n(x) = 0$. Ne segue che $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in (0,1]$. Se invece $x = 0$ risulta $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Ne segue che l'insieme di convergenza puntuale è tutto l'intervallo $[0,1]$ e la funzione limite è la funzione identicamente nulla $f(x) = 0$. Per la convergenza uniforme dobbiamo valutare $\sup\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0,1]} |f_n(x)|$. Osserviamo ora che il grafico della funzione f_n nell'intervallo $\left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{3}{2n}\right]$ è un arco di parabola, nel semipiano positivo, rivolto verso il basso che raggiunge il suo massimo nel vertice che ha ascissa $x = \frac{1}{n}$. Quindi

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2+1}{n^2}$$

e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \ne 0$, quindi la successione di funzioni non converge uniformemente in $[0,1]$.

Esercizio 2

Trovare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ 1 \le z \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

Soluzione

La superficie Σ è una porzione di cono circolare avente per asse l'asse z. Come parametrizzazione scegliamo la seguente:

$$r(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}$$

definita sul dominio

$$\Omega = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

La matrice jacobiana di r e il vettore normale risultano:

$$Jr(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} -\rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}$$

Il modulo del vettore normale è quindi:

$$|N(\rho,\theta)| = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + \rho^2} = \sqrt{2}\,\rho$$

L'area di Σ risulta allora:

$$\int\limits_{\Omega} |N(\rho,\theta)|\,d\rho\,d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_1^2 \sqrt{2}\,\rho\,d\rho = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}\,\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\pi.$$

Esercizio 3

Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix}$ dire se è conservativo. Calcolare inoltre il lavoro compiuto dal campo lungo la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ percorsa dal punto $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ al punto $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

Soluzione

Indichiamo con X, Y, Z le tre componenti del campo. Risulta $X_y = -2y$ e $Y_x = 0$. Quindi la terza componente del rotore del campo F non è nulla. Ne segue che il campo non è conservativo. Per calcolare il lavoro di F lungo γ per prima cosa dobbiamo determinare a quali valori del parametro t corrispondono i punti P_1 e P_2. Guardando la terza componente di γ è evidente che $P_1 = \gamma(0)$ e $P_2 = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ora calcoliamo la velocità di γ, $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora il lavoro cercato è:

$$\int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ \sin^2 t - t^2 \\ t^2 - \cos^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} -\sin t \cos^2 t + \sin^3 t + \cos t \sin^2 t - t^2 \cos t + t^2 - \cos^2 t \, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin t(1 - 2\cos^2 t) + \cos t \sin^2 t - t^2 \cos t + t^2 - \cos^2 t \, dt$$

eseguendo la sostituzione $x = \cos t$ nel primo integrale e $y = \sin t$ nel secondo e integrando per parti il terzo, si ottiene:

$$-\int_1^0 1 - 2x^2 \, dx + \int_0^1 y^2 \, dy - \left[t^2 \sin t\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2t \sin t \, dt + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1 \cos(2t)}{2} \, dt =$$

$$= \int_0^1 1 - x^2 \, dx - \frac{\pi^2}{4} + [-2t \cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2 \cos t \, dt + \frac{\pi^3}{24} - \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{\pi^2}{4} + 2\left[\sin t\right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} = \frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 4

Trovare per quali valori di $\alpha > 0$ la retta tangente alla curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arctan\left((1+t)^\alpha\right) \\ t \end{pmatrix}$ nel punto $P = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ è parallela alla retta di equazione $y = x$.

Soluzione

Calcoliamo il vettore velocità della curva:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha(1+t)^{\alpha-1}}{1+(1+t)^{2\alpha}} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo ora per quale valore di t la curva γ passa per il punto P. Dovremo risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \arctan\left((1+t)^\alpha\right) = \dfrac{\pi}{4} \\ \\ t = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $t = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Quindi il vettore tangente alla curva γ nel punto P sarà $\dot\gamma(0) = \begin{pmatrix} \alpha/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La retta $y = x$ ha come direzione il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi, affinché le due rette siano parallele, dovrà essere $\alpha = 2$.