Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'Ambiente e Territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 10 luglio 2006

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Data la successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{2 + n^2x^2}$ trovarne l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite. Dire se la successione converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale ed eventualmente determinare un insieme di convergenza uniforme.

Soluzione

Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, definitivamente, valgono le disuguaglianze

$$1 \leq \sqrt[n]{2 + n^2x^2} \leq \sqrt[n]{n^3}$$

e che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$. Quindi, per il teorema dei carabinieri si ottiene che la successione converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ e che la funzione limite è $f(x) = 1$. Per la convergenza uniforme basta osservare che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sqrt[n]{2 + n^2x^2} - 1 \right| = +\infty$$

quindi la successione non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Se invece scegliamo un qualsiasi insieme limitato come ad esempio un intervallo $[-a, a]$ con $a > 0$ si ha che

$$\sup_{x\in[-a,a]} \left| \sqrt[n]{2 + n^2x^2} - 1 \right| = \sup_{x\in[-a,a]} \sqrt[n]{2 + n^2x^2} - 1 = \sqrt[n]{2 + n^2a^2} - 1$$

dato che $2 + n^2x^2 \geq 1$ e che la funzione $\sqrt[n]{2 + n^2x^2} - 1$ è pari e crescente nell'intervallo $[0, a]$. Quindi, dato che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + n^2a^2} - 1 = 0$$

c'è convergenza uniforme sull'intervallo $[-a, a]$.

Esercizio 2

Si calcoli l'area della superficie

$$\Sigma = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

Soluzione

La superficie è la porzione di sfera con centro nell'origine e raggio 2 che risulta esterna al cilindro con asse parallelo all'asse z e con base il cerchio unitario nel piano x, y. Parametrizziamola utilizzando le coordinate sferiche con raggio costante 2.

$$r(\phi,\theta) \begin{pmatrix} 2\sin\phi\cos\theta \\ 2\sin\phi\sin\theta \\ 2\cos\phi \end{pmatrix}$$

L'angolo θ esegue una rotazione completa di 2π. Per trovare l'intervallo di variazione di ϕ intersechiamo la sfera con il cilindro.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $z = \pm\sqrt{3}$ quindi $2\cos\phi = \pm\sqrt{3}$ che corrispondono agli angoli $\phi = \dfrac{\pi}{6}$ e $\phi = \dfrac{5}{6}\pi$. Quindi il dominio di base della superficio Σ sarà l'insieme

$$\Omega = \left\{(\phi,\theta) : \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{5}{6}\pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

La matrice jacobiana della parametrizzazione è:

$$Jr = \begin{pmatrix} 2\cos\phi\cos\theta & -2\sin\phi\sin\theta \\ 2\cos\phi\sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta \\ -2\sin\phi & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore normale

$$N = \begin{pmatrix} -4\sin^2\phi\cos\theta \\ 4\sin^2\phi\sin\theta \\ 4\sin\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Il modulo del vettore normale risulta quindi

$$|N| = 4\sqrt{\sin^4\phi\cos^2\theta + \sin^4\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\phi} = 4|\sin\phi|$$

L'area della superficie Σ è quindi data da

$$\int_{\Omega} |N|\, d\phi\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} 4|\sin\phi|\, d\theta = 8\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \sin\phi\, d\phi = 8\pi\left(\cos\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = 8\pi\sqrt{3}$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = -e^{zy} \sin x \, dx + z e^{zy} \cos x \, dy + \left(y e^{yz} \cos x - \frac{2z}{1+z^2} \right) dz$$

lungo la curva

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (t^2-1)\cos t \\ (t^2-1)\sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [-1, 1]$$

Soluzione

Osserviamo che la forma differenziale è chiusa. Infatti, indicando con X, Y, Z le sue componenti, si ottiene

$$X_y = -z e^{zy} \sin x = Y_x, \qquad X_z = -y e^{zy} \sin x = Z_x, \qquad Y_z = (1+zy) e^{yz} \cos x = Z_y$$

Dato che ω è definita in tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso, la forma differenziale è anche esatta. Ne segue che per calcolare l'integrale possiamo sostituire γ con una qualsiasi altra curva che abbia gli stessi estremi.

$$\gamma(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Come curva alternativa scegliamo il segmento di retta che unisce i due estremi, quindi

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [-1, 1]$$

La velocità di α è il vettore costante $\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega = \int_{-1}^{1} -\frac{2t}{1+t^2} \, dt = 0$$

essendo l'integranda dispari e l'intervallo di integrazione simmetrico rispetto all'origine.

Esercizio 4

Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{(x-1)^2}{n}$$

e dire se converge totalmente sull'insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

La serie è a termini positivi dato che $\cos t \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi utilizzare il criterio del confronto asintotico. Lo sviluppo di Taylor del coseno per $t \to 0$ è:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Osserviamo che per ogni x fissato $\lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)^2}{n} = 0$, quindi possiamo sostituire nello sviluppo di Taylor $t = \frac{(x-1)^2}{n}$ ottenendo

$$1 - \cos \frac{(x-1)^2}{n} = 1 - 1 + \frac{(x-1)^4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

quindi la serie è asintoticamente equivalente alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^4}{n^2}$$

e questa serie è convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $\mathbb{R}$.
Osserviamo ora che per $x = 1 + \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$ risulta $\frac{(x-1)^2}{n} = \frac{\pi}{2}$ quindi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| 1 - \cos \frac{(x-1)^2}{n} \right| = 1$$

Ne segue che la serie non converge totalmente in $\mathbb{R}$.