Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'Ambiente e Territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 20 giugno 2006

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Calcolare l'area della superficie ottenuta facendo compiere una rotazione completa attorno all'asse z alla curva descritta nel piano y, z dalle equazioni

$$\begin{cases} y(t) = 5\cos t \\ z(t) = 3\sin^2 t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Soluzione

Utilizzando il teorema di Guldino otteniamo che l'area cercata è data dal percorso del baricentro moltiplicato per la lunghezza della curva, quindi, indicando con y_B la distanza del baricentro dall'asse di rotazione:

$$2\pi\, y_B\, l(\gamma) = 2\pi \int_\gamma y\, ds$$

Calcoliamo quindi la velocità di γ:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -5\sin t \\ 6\sin t\cos t \end{pmatrix}$$

e il suo modulo:

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{25\sin^2 t + 36\sin^2 t\cos^2 t} = |\sin t|\sqrt{25 + 36\cos^2 t}$$

Quindi, eseguendo la sostituzione $\cos t = \xi$ nell'integrale che segue, si ha:

$$\int_\gamma y\, ds = \int_0^{\pi/4} 5\cos t|\sin t|\sqrt{25+36\cos^2 t}\, dt = -5\int_1^{\sqrt{2}/2} \xi\sqrt{25+36\xi^2}\, d\xi =$$

$$= -5\left[\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{36}\left(25+36\xi^2\right)^{3/2}\right]_1^{\sqrt{2}/2} = \frac{5}{108}\left(61^{3/2} - 43^{3/2}\right)$$

quindi l'area cercata è:

$$\frac{5}{54}\,\pi\left(61^{3/2} - 43^{3/2}\right)$$

Esercizio 2

Si consideri la curva espressa in forma polare dall'equazione

$$\rho(\vartheta) = (e^{2\vartheta} + 1)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$$

Trovare l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto di coordinate $(2, 0)$.

Soluzione

Prima di tutto troviamo a quale valore di ϑ corrisponde il punto $(2, 0)$. Dato che il punto $(2, 0)$ appartiene all'asse x, l'angolo corrispondente sarà $\theta = 0$. Possiamo anche verificare, anche se non è necessario, che la curva passi effettivamente per il punto $(2, 0)$ sostituendo $\vartheta = 0$ nell'equazione che definisce ρ ottenendo:

$$\rho(0) = (e^0 + 1)(\cos^2 0 - \sin^2 0) = 2$$

Cerchiamo ora di trovare la velocità della curva nel punto in questione. Ricordiamo che l'espressione della curva in coordinate cartesiane è:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = \cos\vartheta\rho(\vartheta) \\ y(\vartheta) = \sin\vartheta\rho(\vartheta) \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} \dot{x}(\vartheta) = -\sin\vartheta\rho(\vartheta) + \cos\vartheta\dot{\rho}(\vartheta) \\ \dot{y}(\vartheta) = \cos\vartheta\rho(\vartheta) + \sin\vartheta\dot{\rho}(\vartheta) \end{cases}$$

Valutiamo il tutto per $\vartheta = 0$:

$$\rho(0) = 2, \qquad \dot{\rho}(0) = 2, \qquad \dot{x}(0) = 2, \qquad \dot{y}(0) = 2$$

ne segue che il vettore tangente nel punto $(2, 0)$ è $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, quindi la retta tangente ha equazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2t \\ 2t \end{pmatrix}$$

che corrisponde al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2t \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si ottiene l'equazione cartesiana:

$$y = x - 2$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma y^4\,dx + (4xy^3 + 7)\,dy$$

dove γ è la curva cartesiana di equazione $y = \sqrt{|x-2|^3}$, $1 \leq x \leq 3$, percorsa nel verso crescente della variabile x.

Soluzione

Osserviamo che la forma differenziale integranda è chiusa, infatti, indicandone con X e Y le componenti ed eseguendo le derivate incrociate si ha:

$$X_y = 4y^3 = Y_x$$

Dato che la forma differenziale è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ che è un insieme semplicemente connesso, si ottiene che è anche esatta. Allora è possibile calcolare l'integrale invece che su γ su una qualsiasi altra curva che congiunga gli estremi di γ che sono, rispettivamente: $\gamma(1) = (1, y(1)) = (1, 1)$ e $\gamma(3) = (3, y(3)) = (3, 1)$. Come curva alternativa scegliamo il segmento di retta di equazione

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [1, 3]$$

Essendo $\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'integrale su α diventa:

$$\int_\alpha y^4\,dx + (4xy^3 + 7)\,dy = \int_1^3 1^4 \cdot 1 + (4t\,1 + 7)\,0\,dt = 2$$

Esercizio 4

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{2 + n^x}$$

trovarne l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite. Dire inoltre se la successione delle derivate converge uniformemente nell'intervallo $[-1, 1]$.

Soluzione

La successione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dato che

$$\lim_{n\to\infty} n^x = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è tutto $\mathbb{R}$ e la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Se la successione delle derivate convergesse uniformemente nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione limite $f(x)$ sarebbe una funzione derivabile in tale intervallo, mentre f non è derivabile nel punto $x = 0$. Infatti:

$$f'_-(0) = \frac{1}{2} \neq f'_+(0) = 0$$