Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 29 maggio 2006

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(4nx)}{n^2+3}$$

Dire inoltre se la serie delle derivate converge totalmente sull'insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(-1)^{n+1}\frac{\cos(4nx)}{n^2+3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

e quest'ultima serie converge perché è una serie armonica di esponente 2. La serie quindi converge totalmente, e di conseguenza anche uniformemente, assolutamente e puntualmente, in tutto $\mathbb{R}$. La serie delle derivate risulta essere

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4n}{n^2+3}\sin(4nx)$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(-1)^{n}\frac{4n}{n^2+3}\sin(4nx)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^2+3} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

e quest'ultima serie diverge. La serie delle derivate quindi non converge totalmente sull'insieme di convergenza puntuale.

Esercizio 2

Data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t + 1 \\ \log(1+t) + t + 1 \end{pmatrix}$ con $t \in \left[-\frac{1}{2}, 5\right]$ trovare l'equazione cartesiana della retta tangente a γ nel punto di coordinate $(2, 1)$.

Soluzione

L'equazione vettoriale della retta tangente è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\,\dot{\gamma}(t_0), \quad s \in \mathbb{R}$$

dove t_0 è il valore di t per il quale la curva γ passa per il punto $(2, 1)$. Per determinare t_0 basta risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} e^t + 1 = 2 \\ \log(1+t) + t + 1 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $t = 0$.
La velocità di γ è:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \\ \dfrac{1}{1+t} + 1 \end{pmatrix}$$

e nel punto $t_0 = 0$

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sostituendo risulta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per determinare l'equazione cartesiana basta eliminare la variabile s dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + 2s \end{cases}$$

ottenendo $y = 2x - 3$.

Esercizio 3

Data la forma differenziale lineare $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}}\,dx - \left(\dfrac{2y}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}} + \log(y+1)\right)dy$ stabilirne l'insieme di definizione. Verificare che la forma è esatta, specificando su quale insieme e determinare la primitiva che nel punto $(0,0)$ vale 5.

Soluzione

La forma è definita dove $1-(x-y^2)^2 > 0$ e $y+1 > 0$, quindi dove $|x-y^2| < 1$ e $y > -1$ che corrisponde al sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} y^2 - 1 < x < y^2 + 1 \\ y > -1 \end{cases}$$

Geometricamente tale insieme è l'intersezione della zona compresa tra due parabole parallele con l'asse concidente con l'asse x e un semipiano.
Verifichiamo che la forma è chiusa. Indicando con X e Y le componenti della forma si ha:

$$X_y = \frac{-2y(x-y^2)}{\sqrt{(1-(x-y^2)^2)^3}} = Y_x$$

L'insieme di definizione di ω è

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 1 < x < y^2 + 1,\ y > -1\}$$

che è semplicemente connesso, quindi ω è esatta. Determiniamo una primitiva U integrando prima rispetto a x e poi a y.

$$U(x,y) = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}}\,dx + \phi(y) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \phi(y)\Big|_{x-y^2=t} = \arcsin t + \phi(y)\Big|_{x-y^2=t} =$$
$$= \arcsin(x-y^2) + \phi(y)$$

Derivando rispetto a y si ottiene:

$$U_y = \frac{-2y}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}} + \phi'(y)$$

sostituendo nell'equazione $U_y = Y$ si ha:

$$\phi'(y) = -\log(y+1)$$

e integrando rispetto a y si ottiene:

$$\phi(y) = -\int \log(y+1)\,dy + c = -(y+1)\log(y+1) + y + 1 + c$$

Allora

$$U(x,y) = \arcsin(x-y^2) - (y+1)\log(y+1) + y + 1 + c$$

Per determinare c utilizziamo la condizione $U(0,0) = 5$:

$$5 = U(0,0) = \arcsin 0 - 1\log 1 + 1 + c$$

quindi $c = 4$ e $U(x,y) = \arcsin(x-y^2) - (y+1)\log(y+1) + y + 5$.

Esercizio 4

Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} xye^{2y^2}\, d\sigma$$

dove Σ è la superficie cartesiana di equazione $z = 3x - \int_1^y e^{t^2}\, dt,\ 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4.$

Soluzione

Indichiamo con D l'insieme del piano:

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4\}$$

e con f la funzione $f(x, y) = 3x - \int_1^y e^{t^2}\, dt$. Allora Σ è il grafico di f sul dominio D. Calcoliamo il gradiente di f.

$$f_x = 3, \qquad f_y = -e^{y^2}$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} xye^{2y^2}\, d\sigma = \int_D xye^{2y^2}\sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy = \int_D xye^{2y^2}\sqrt{10 + e^{2y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2 x\, dx \int_1^4 ye^{2y^2}\sqrt{10 + e^{2y^2}}\, dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \int_{10+e^2}^{10+e^{32}} \frac{1}{4}\sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\, t^{3/2}\right]_{10+e^2}^{10+e^{32}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(10 + e^{32}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(10 + e^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$