Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 13 febbraio 2006

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Data la successione $a_n = \dfrac{|\sin \frac{n\pi}{4}|}{n^2+1}$ risulta che:

A) esiste il minimo di (a_n) B) (a_n) ha due limiti

C) non esiste il limite di (a_n) D) (a_n) non è limitata superiormente

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 2 Dati $z, w \in \mathbb{C}$ risulta $e^{z-w} =$

A) $e^{\Re(z)} - e^{\Im(w)}$ B) $e^z - e^w$ C) $\dfrac{e^z}{e^w}$ D) $\dfrac{|z|}{|w|}$

$\boxed{\text{C}}$

Domanda 3 Date due successioni di numeri reali (a_n) e (b_n) tali che $a_n \leq b_n \, \forall \, n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, risulta necessariamente che:

A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b_n}$ converge

C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n$ diverge D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 b_n}$ converge

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 4 Per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ risulta:

A) $\sin(3\vartheta) = 3\sin\vartheta$ B) $\sin(3\vartheta) = 3\cos^2\vartheta \sin\vartheta - \sin^3\vartheta$

C) $\sin(3\vartheta) = 3\vartheta\cos(3\vartheta)$ D) $\sin(3\vartheta) = 3\cos\vartheta\sin\vartheta$

$\boxed{\text{B}}$

Domanda 5 Sia $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}},\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora

A) f non è limitata superiormente B) f è crescente

C) f è limitata inferiormente D) f ha minimo

C

Domanda 6 Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$. Allora

A) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge B) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$

C) l'integrale di f su $[-1, 0]$ non converge assolutamente

D) l'integrale di f su $[-1, 1]$ converge assolutamente

C

Domanda 7 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(x) < 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ necessariamente si ha che:

A) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)\,dt$ è crescente B) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$ è crescente per $x > 0$

C) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ è limitata per $x > 1$ D) $F(x) = \displaystyle\int_0^x |f(t)|\,dt$ è decrescente per $x < 0$

A

Domanda 8 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente. Allora, necessariamente:

A) $f(x) \geq 0\, \forall\, x \geq 0$ B) $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0\ \forall x \neq y$

C) $f(x + y) \geq f(x) + f(y),\ \forall x, y$ D) $f(x) \geq x,\ \forall x \geq 0$

B

Domanda 9 La funzione $f(x) = x + 2\cos x$

A) è invertibile B) è periodica C) ha infiniti punti di minimo locale

D) non ha limite per $x \to \infty$

C

Domanda 10 Data $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua con $f < 0$, risulta necessariamente che:

A) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{f(x)}{1 + x^2}\,dx$ esiste finito B) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ non converge

C) $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx = -\infty$ D) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ converge

A

Rispondere alle seguenti 5 domande inserendo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata o mancante vale 0.

Domanda 11 Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3-n}$

$\boxed{\text{converge}}$

Domanda 12 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x - x^2}{x \log(1+2x^3)}$

$\boxed{-\frac{1}{12}}$

Domanda 13 Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + x \log x}{x}$

$\boxed{2\sqrt{x} + x \log x - x}$

Domanda 14 Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(2n)}{n}$

$\boxed{\text{diverge}}$

Domanda 15 Dire se la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \arctan(1+x^2)$ è invertibile.

$\boxed{\text{NO}}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 13 febbraio 2006

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)} & \text{se } x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 2 \\ \sqrt{x} - \dfrac{1}{x-2} & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$

Soluzione

Osserviamo che la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo il limiti all'infinito e nei punti 0 e 2.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 0$$

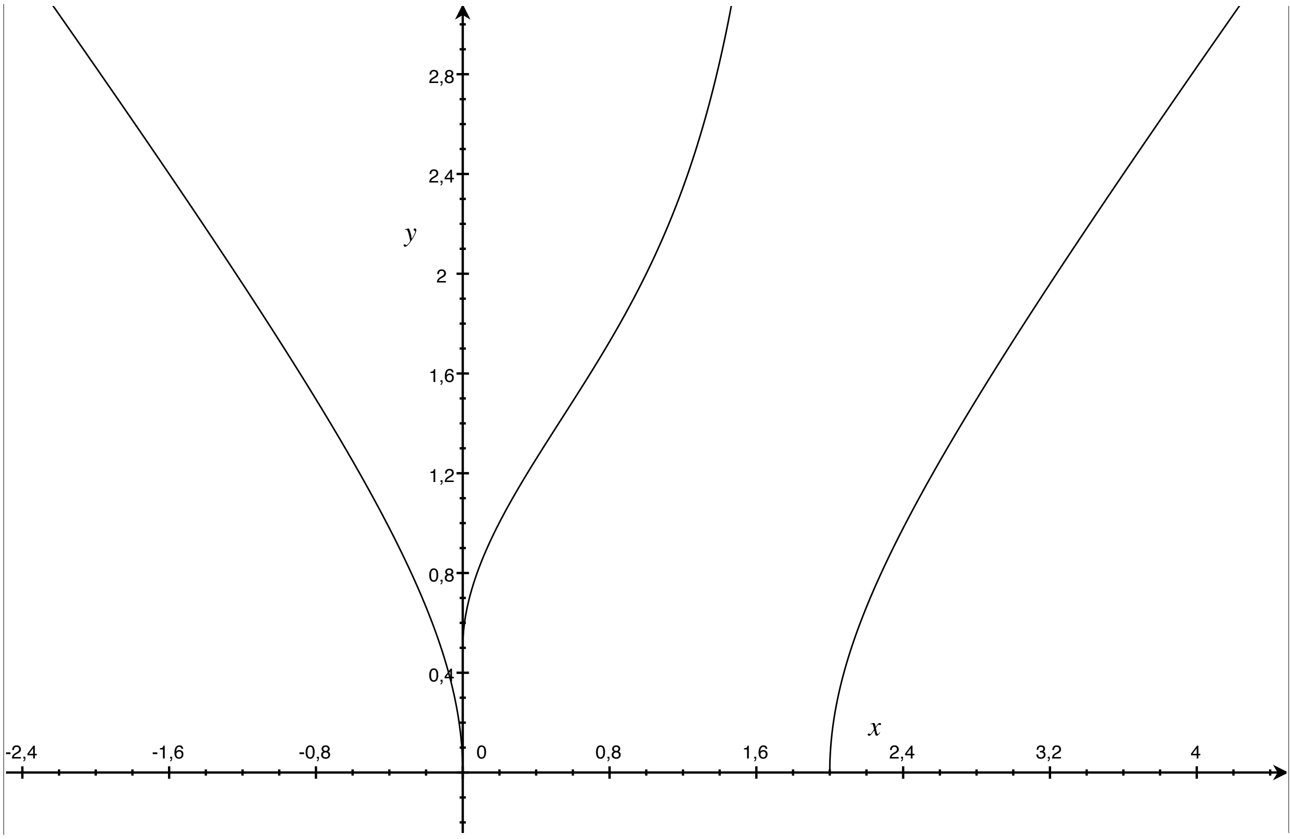
La f quindi non è continua nei punti $x = 0$ e $x = 2$ e non è limitata superiormente. C'è un asintoto verticale da sinistra nel punto $x = 2$.
Osserviamo anche che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi il minimo assoluto di f è 0 e viene assunto nei punti $x = 0$ e $x = 2$. Valutiamo ora la derivata di f nelle due semirette $(2, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$.

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}$$

e risulta $f'(x) > 0$ se $x > 1$ e, intersecando col dominio, per $x > 2$. La f è quindi crescente sulla semiretta $(2, +\infty)$ e decrescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$. Nell'intervallo $(0, 2)$ risulta invece:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

che è sempre positiva. La f quindi è crescente nell'intervallo $(0, 2)$. Come conseguenza, non ci sono punti di massimo locale e gli unici punti di minimo locale (e assoluto) sono $x = 0$ e $x = 2$.



y
2,8
2,4
2
1,6
1,2
0,8
0,4
x
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,2
4

Esercizio 2 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$$

Soluzione

Ricordiamo che

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0$$

Quindi, applicando la formula precedente con $t = \dfrac{1}{n}$ si ottiene:

$$\frac{1}{\log n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\log n\left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \frac{2n^2}{\log n(1+o(1))}$$

e ricordando il limite notevole $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = +\infty$ si ottiene che il limite cercato vale $+\infty$.

Esercizio 3 Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}-1\right)}$

Soluzione

Osserviamo che la serie è a termini positivi perché $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}} \geq 1$. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico.
Ricordiamo lo sviluppo di Taylor della radice centrato in $t=0$:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t) \quad \text{per } t \to 0$$

e lo applichiamo con $t = \dfrac{1}{n^3}$

$$\frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}-1\right)} = \frac{1}{n\left(\frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = \frac{2n^2}{1+o(1)}$$

quindi la serie è asintotica alla serie di $2n^2$ che diverge positivamente.