Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 26 gennaio 2006

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia (a_n) la successione definita da $a_n = n^2 \sin \frac{n\pi}{2}$. Allora

A) (a_n) è limitata B) (a_n) è limitata inferiormente

C) non esiste $\lim_{n\to\infty} a_n$ D) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

C

Domanda 2 Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$ risulta:

A) $\left|\frac{z}{w}\right| = |z| - |w|$ B) $|zw| = |z|\,|w|$ C) $|zw| = e^{zw}$ D) $|z+w| = |z| + |w|$

B

Domanda 3 Se $a_n \geq 0$ e $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora, necessariamente

A) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge B) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n}{n^2}$ converge

C) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge D) $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n$ diverge

B

Domanda 4 Dati $a, b < 0$ allora necessariamente

A) $\log(ab) = \log a + \log b$ B) $\log \frac{a}{b} = \log(-a) - \log(-b)$

C) $\log(a^b) = b \log a$ D) $\log(ab) = -\log a - \log b$

B

Domanda 5 Sia $f(x) = \sin(x^2)$. Allora:

A) f è crescente per $x > 0$ B) f ha infiniti punti di massimo assoluto

C) f non è limitata D) f ha solo punti di massimo locali ma non ha massimo assoluto

B

Domanda 6 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\, dt$

A) non esiste B) converge ma non converge assolutamente

C) è un numero minore di 1 D) vale $+\infty$

C

Domanda 7 Data f continua in $\mathbb{R}$ risulta che $\displaystyle\int_a^b \sin(f(x))\, dx =$

A) $\sin(f(b)) - \sin(f(a))$ B) $(\cos b)\, f(a) - (\sin a)\, f(b)$

C) un numero reale minore o uguale a $|a-b|$ D) $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} \sin t\, dt$

C

Domanda 8 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata superiormente. Allora, necessariamente

A) $f(x) \leq M,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathbb{R}$ B) $\exists M \in \mathbb{R} :\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M + \varepsilon$

C) $\forall M \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R} :\ f(x_0) \geq M - \varepsilon$

D) $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ :\ M - \varepsilon < f(x) \leq M + \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}$

B

Domanda 9 Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali positivi con (b_n) limitata e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora, necessariamente:

A) $a_n - b_n$ è limitata B) $\dfrac{a_n}{b_n}$ è limitata C) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$ D) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

A

Domanda 10 Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con due punti di minimo assoluti.
Allora, necessariamente:

A) f ha un solo punto di massimo locale B) f ha un solo punto di massimo assoluto

C) f è costante D) f è superiormente limitata

D

Rispondere alle seguenti 5 domande inserendo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata o mancante vale 0.

Domanda 11 Scrivere parte reale e parte immaginaria del numero complesso $z = e^{3+2i}$

$$\boxed{\Re(z) = e^3 \cos 2\,,\ \Im(z) = e^3 \sin 2}$$

Domanda 12 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n^2} - 1}{\sin \frac{1}{n}}$

$$\boxed{0}$$

Domanda 13 Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n^2) - n}{n^3 + \cos n}$

$$\boxed{\text{converge}}$$

Domanda 14 Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c}$$

Domanda 15 Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{3x^4}$

$$\boxed{-\frac{1}{6}}$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica I

Pisa, 26 gennaio 2006

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = 2 + \log(1 + 2x^2)$ compresa l'analisi della convessità.

Soluzione

La funzione è definita in tutta la retta reale. Inoltre, essendo $1 + x^2 \geq 1$ risulta $f(x) \geq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 2$ se e solo se $x = 0$. Il punto $x = 0$ è quindi punto di minimo assoluto per f e il minimo assoluto di f vale 2. Osserviamo che la funzione è pari.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

quindi anche $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Di conseguenza f non ha massimo assoluto e il suo estremo superiore vale $+\infty$.

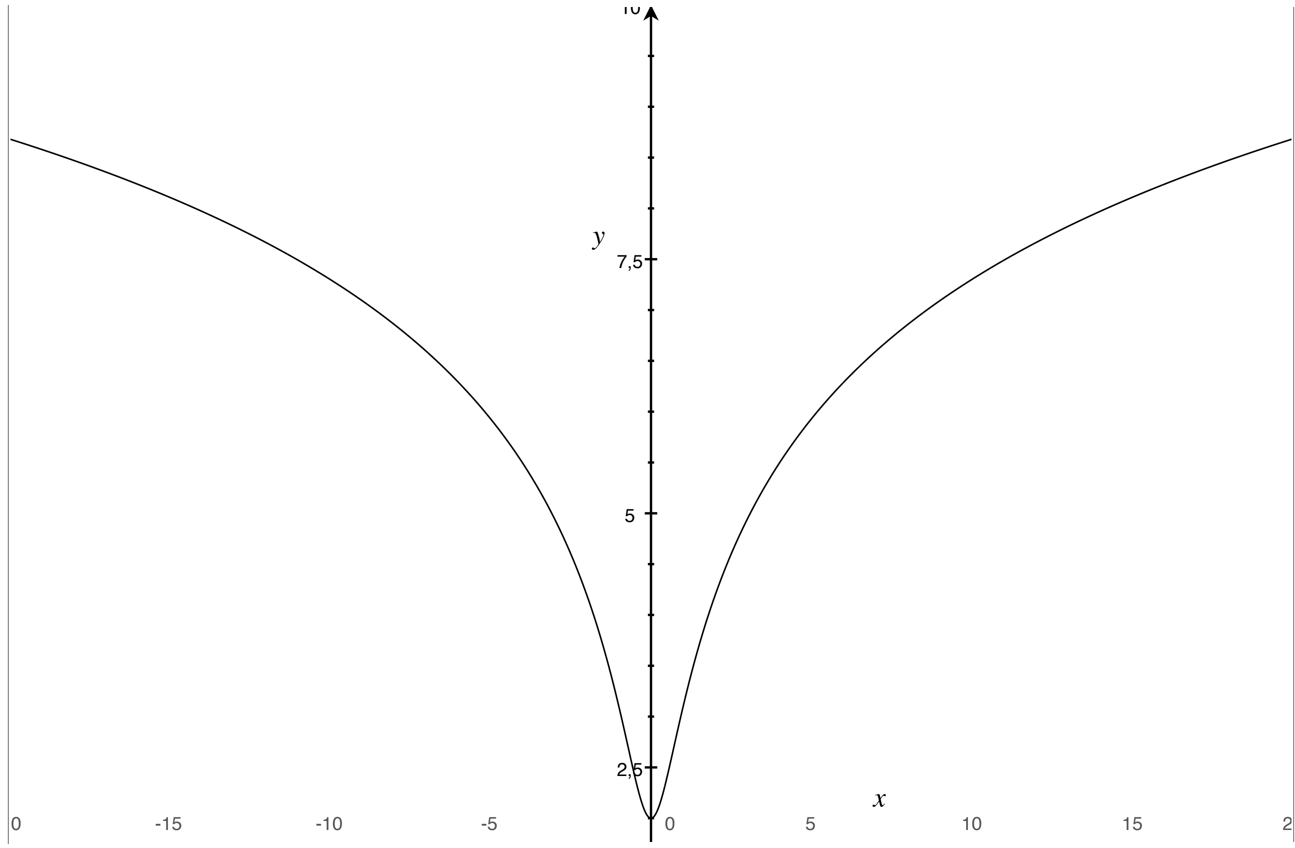
$$f'(x) = \frac{4x}{1 + 2x^2}$$

quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Ne segue che la f è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$. Quindi la f non ha altri punti di massimo o di minimo locali oltre $x = 0$.

$$f''(x) = 4\,\frac{1 - 2x^2}{(1 + 2x^2)^2}$$

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow 1 - 2x^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La funzione è quindi convessa nell'intervallo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e concava in ognuna delle due semirette $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. I punti $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di flesso.



y
x
10
7,5
5
2,5
0
-15
-10
-5
0
5
10
15
2

Esercizio 2 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}\sin x\, dx$

Soluzione

Cerchiamo una primitiva della funzione $f(x) = e^{\cos x}$. Eseguendo la sostituzione $\cos x = t$ si ottiene:

$$\int e^{\cos x}\sin x\, dx = \int e^t\, dt\bigg|_{t=\cos x} = e^t\bigg|_{t=\cos x} = e^{\cos x}$$

quindi

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}\sin x\, dx = [e^{\cos x}]_0^{\pi/2} = e - 1.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione complessa $|z|^2 - z|z| + z = 0$.

Soluzione

Scrivendo $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ otteniamo:

$$a^2 + b^2 - (a + ib)\sqrt{a^2 + b^2} + a + ib = 0$$

quindi, separando parte reale e parte immaginaria otteniamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - a\sqrt{a^2 + b^2} + a = 0 \\ -b\sqrt{a^2 + b^2} + b = 0 \end{cases}$$

Risolviamo prima la seconda equazione:

$$b\left(1 - \sqrt{a^2 + b^2}\right) = 0$$

che ha soluzione $b = 0$ oppure $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Se $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, sostituendo nella prima equazione otteniamo $1 - a + a = 0$ che è falsa. Quindi l'unica possibilità è che sia $b = 0$. Sostituendo nella prima equazione otteniamo $a^2 - a|a| + a = 0$. Questa equazione dà luogo a due sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} a^2 - a^2 + a = 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + a^2 + a = 0 \\ a \leq 0 \end{cases}$$

Il primo sistema ha come unica soluzione $a = 0$ mentre il secondo $a = -\frac{1}{2}$. Ricordando che $z = a + ib$ otteniamo che l'equazione iniziale ha come soluzioni $z = 0$ e $z = -\frac{1}{2}$.