Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 14 settembre 2005

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali tali che $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora, necessariamente:

A) se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e (b_n) converge si ha che (a_n) è limitata
B) se $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ si ha che anche $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
C) se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e (b_n) converge si ha che anche (a_n) converge
D) se $b_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che esiste il limite di (a_n).

$\boxed{\text{A}}$

Domanda 2 $\log_4(16) \cdot \log_4(64) =$

$\boxed{\text{B}}$

A) $\log_4(16) + \log_4(64)$ B) 6 C) $\log_4(16 \cdot 64)$ D) $\log_4(16 + 64)$

Domanda 3 $\arctan\left(\tan\left(\frac{16}{3}\pi\right)\right) =$

$\boxed{\text{B}}$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) non esiste D) $\frac{16}{3}\pi$

Domanda 4 Sia $f(x) = \log_{-x}(x^2)$ per $x < -1$. Allora

$\boxed{\text{C}}$

A) $f'(x) = \frac{2}{x^2}$ B) $f'(x) = \frac{2}{x}$ C) $f'(x) = 0$ D) f non è derivabile

Domanda 5 $\lim_{n\to\infty} \log\left(e^{\arctan(n^2)}\right) =$

$\boxed{\text{C}}$

A) $+\infty$ B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) non esiste

Domanda 6 Dire quale dei seguenti insiemi è superiormente limitato:

A) $\{y \in \mathbb{R} : y = e^{2n},\ n \in \mathbb{N}\}$ B) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}$
C) $\{y \in \mathbb{R} : y = -\log x,\ x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ D) $\{x \in \mathbb{R} :\ \arctan x < 1\}$

$\boxed{\text{D}}$

Domanda 7 Il polinomio di Taylor di ordine 7 nel punto $x = 0$ della funzione $f(x) = \sin(3x^2)$ è:

$\boxed{\text{D}}$

A) $3x^2 - \frac{3x^6}{3!}$ B) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ C) $\cos(3x^2) - \frac{\sin(3x^2)}{3!}$ D) $3x^2 - \frac{9}{2}x^6$

Domanda 8 Sia $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $|e^z| =$

B

A) $e^{|z|}$ B) e^a C) $(e^a)^2 + (e^b)^2$ D) e^{ib}

Domanda 9 $\lim_{n\to\infty} \sin(\arctan(-n^2)) =$

B

A) non esiste B) -1 C) $-\frac{\pi^2}{4}$ D) $-\frac{\pi}{2}$

Domanda 10 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^2 con $f'(0) = 0$. Allora, necessariamente:

C

A) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ B) $x = 0$ è un punto di massimo assoluto per f

C) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0$ D) $f(x) \leq 0 \ \forall x \leq 0$

$\boxed{x - \log|x+1|}$

Domanda 11 Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Domanda 12 Calcolare la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = x + \sin(2x)$$

$\boxed{3x}$

$\boxed{1}$

Domanda 13 Calcolare, se esiste, il limite della successione $a_n = \dfrac{n + \sin(n^2)}{n}$

$\boxed{\nexists}$

Domanda 14 Calcolare, se esiste, $\lim_{x \to 0} x^2 + \dfrac{1}{2x}$

$\boxed{x - 2\log|x+3| + c}$

Domanda 15 Calcolare $\displaystyle\int \frac{x+1}{x+3}\, dx$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 14 settembre 2005

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1 Dire se converge ed eventualmente calcolare

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$$

Soluzione

Poniamo $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$. Risulta $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$ quindi la funzione integranda non è limitata negli estremi dell'intervallo di integrazione. In tutti gli altri punti la f è continua. Possiamo quindi dividere l'intervallo in un punto intermedio qualsiasi, ad esempio $x = 3$, e valutare l'integrabilità separatamente sui due intervalli $(2, 3]$ e $[3, 4)$. Osserviamo che $-x^2+6x-8 = (x-2)(4-x)$ quindi

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-2}} \quad \text{per } x \to 2^+$$

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{4-x}} \quad \text{per } x \to 4^-$$

Ne segue che gli integrali $\int_3^4 f(x)\,dx$ e $\int_2^3 f(x)\,dx$ convergono, quindi converge anche $\int_2^4 f(x)\,dx$. Per calcolare l'integrale osserviamo che $-x^2+6x-8 = 1-(x-3)^2$, quindi eseguiamo la sostituzione $x-3 = t,\ dx = dt$ ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_{t=x-3} = \arcsin(x-3) =: F(x)$$

Allora

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \lim_{k\to 2^+} F(3)-F(k) = \lim_{k\to 2^+} \arcsin(0)-\arcsin(k-3) = 0-\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_3^4 f(x)\,dx = \lim_{k\to 4^-} F(k)-F(3) = \lim_{k\to 4^-} \arcsin(k-3)-\arcsin 0 = \arcsin(1)-0 = \frac{\pi}{2}$$

quindi

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \pi$$

Esercizio 2 Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \frac{[x]}{2x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Soluzione

La funzione f è definita per ogni $x \neq 0$. La funzione parte intera di x è una funzione che è continua e derivabile nell'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, quindi in tale insieme anche la f è continua e derivabile, visto che è prodotto di funzioni derivabili. Controlliamo la continuità nei punti di $\mathbb{Z}$. Distinguiamo 2 casi: interi pari e interi dispari. Fissiamo $k \in \mathbb{Z}$ con $k \neq 0$. Risulta $f(2k) = \dfrac{2k}{4k}\sin(k\pi) = 0$ e $\lim_{x\to 2k} f(x) = \lim_{x\to 2k} \dfrac{[x]}{2x} \cdot 0 = 0$ dato che la funzione $\dfrac{[x]}{2x}$ è limitata in un intorno del punto $2k$ se $k \neq 0$. Quindi f è continua negli interi pari. Vediamo in quelli dispari:

$$\lim_{x\to 2k+1^+} f(x) = \frac{2k+1}{2(2k+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2} & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2k+1^-} f(x) = \frac{2k}{2(2k+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -\frac{k}{2k+1} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \frac{k}{2k+1} & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

i due limiti sono diversi, quindi f non è continua nei punti interi dispari. Vediamo ora la derivabilità nei punti interi pari valutando il rapporto incrementale destro e sinistro. Utilizzando la sostituzione $x - 2k = t$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 2k^+} \frac{f(x) - f(2k)}{x - 2k} = \lim_{x\to 2k^+} \frac{[x]}{2x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{1}{x-2k} = \lim_{x\to 2k^+} \frac{2k}{2x} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-2k} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(t+2k)\right)}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^k \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t} = \frac{\pi}{4}(-1)^k$$

$$\lim_{x\to 2k^-} \frac{f(x) - f(2k)}{x - 2k} = \lim_{x\to 2k^-} \frac{2k-1}{2x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{1}{x-2k} = \frac{2k-1}{2k} \lim_{t\to 0^-} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t + k\pi\right)}{t} = \frac{2k-1}{2k}\frac{\pi}{2}(-1)^k$$

quindi f non è derivabile nei punti pari. Nei punti dispari non è derivabile perché non è neanche continua.

Esercizio 3 Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n \left(\log(\alpha^2+1)\right)^n}$$

Soluzione

Per prima cosa osserviamo che la serie ha senso solo per $\alpha \neq 0$. Inoltre è a segni alterni. Infatti $\log(\alpha^2+1) > 0$ se $\alpha \neq 0$. Possiamo allora tentare di applicare il criterio di Leibniz. Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{1}{n^2 3^n \left(\log(\alpha^2+1)\right)^n} = \frac{1}{n^2 \left(3\log(\alpha^2+1)\right)^n}$$

Se $\dfrac{1}{3\log(\alpha^2+1)} \leq 1$ la successione a_n è infinitesima e decrescente, quindi per il criterio di Leibniz la serie converge. Se invece $\dfrac{1}{3\log(\alpha^2+1)} > 1$ la successione a_n non è infinitesima quindi viene a mancare la condizione necessaria per la convergenza della serie.
Vediamo per quali α risulta $\dfrac{1}{3\log(\alpha^2+1)} \leq 1$:

$$3\log(\alpha^2+1) \geq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha^2+1 \geq e^{1/3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha^2 \geq e^{1/3}-1$$

cioè $\alpha \geq \sqrt{e^{1/3}-1}$ oppure $\alpha \leq -\sqrt{e^{1/3}-1}$.