Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 19 luglio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1. Siano $f, g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1. Allora, necessariamente:

A) $\int_0^2 f(x)g(x)\,dx = \left(\int_0^2 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^2 g(x)\,dx\right)$

B) $\int_0^2 f(x)g(x)\,dx = f(2)g'(0) - f'(0)g(2)$

C) $\int_0^2 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx$

D) $\int_0^2 f'(x)g(x)\,dx = f(2)g(2) - f(0)g(0) - \int_0^2 f(x)g'(x)\,dx$

D

Domanda 2. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Allora, necessariamente:

A) $\exists \delta > 0 : f(x) = 0 \ \forall x \in (-\delta, \delta)$.

B) $\exists \delta > 0 : f(x) \neq 0 \ \forall x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

C) $\exists \delta > 0 : f(x) \geq 0 \ \forall x \in (0, \delta)$ e $f(x) \leq 0 \ \forall x \in (-\delta, 0)$.

D) la funzione $\overline{f}$ definita da $\overline{f}(x) = f(x)$ se $x \neq 0$, $\overline{f}(0) = 0$, è continua nel punto $x = 0$.

D

Domanda 3. Data $f \in C^1(\mathbb{R})$ poniamo $F(x) = \int_0^{\sin x} f'(t)\,dt$. Allora, necessariamente

A) $F'(x) = f(\sin x) - f(0)$ B) $F'(x) = f'(\sin x)$

C) $F(x) = f(\sin x) - f(0)$ D) $F'(x) = -f'(x)$

C

Domanda 4. Sia $f : [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Allora, necessariamente:

A) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,dx$ converge B) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = +\infty$

C) $f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ per $x \to +\infty$ D) $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

A

Domanda 5. $\log_2 4 - \log_2 16 =$

A) $-\log 12$ B) -2 C) $\dfrac{\log_2 4}{\log_2 16}$ D) -4

B

Domanda 6. La parte immaginaria del numero complesso $\frac{1}{e^i}$ è:

A) $\sin(-i)$ B) -1 C) $-i$ D) $-\sin 1$

D

Domanda 7. Sia $f(x) = x^{(x^2)}$ con $x > 0$. Allora $f'(x) =$

A) $2x\,x^{(x^2)}$ B) $x^{(x^2)}$ C) $x^{(x^2)}(2x \log x + x)$ D) non è derivabile

C

Domanda 8. Sia (a_n) una successione di numeri reali tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Allora

A) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \overline{n} \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$

B) $\forall M > 0\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \overline{n} \Longrightarrow a_n < -M$

C) $\exists M > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > M$

D) $\forall M > 0,\ \forall \overline{n} \in \mathbb{N}$ si ha che $n \geq \overline{n} \Longrightarrow a_n < -M$

B

Domanda 9. Se $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, allora:

A) $z + \overline{z} = 2a$ B) $z - \overline{z} = 0$ C) $z - \overline{z} = |z|$ D) $z - \overline{z} = 2b$

A

Domanda 10. Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Allora, necessariamente:

A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge B) se $b_n \sim \frac{1}{n^2}$ si ha che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge assolutamente

C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ diverge D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

B

Rispondere alle seguenti 5 domande inserendo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata o mancante vale 0.

$\boxed{\frac{1}{2}}$

Domanda 11. Calcolare $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$.

Domanda 12. Trovare estremi superiore e inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\boxed{\sup A = 1,\ \inf A = -1}$

$\boxed{+\infty}$

Domanda 13. Calcolare $\lim_{x\to\infty} x^3 \dfrac{5 - \cos x}{3 + \sin x}$

$\boxed{1}$

Domanda 14. Trovare il minimo dell'insieme $\{n^2 - 5n + 7,\ n \in \mathbb{N}\}$

$\boxed{\dfrac{\text{cotan}x}{1 + (\log \sin x)^2}}$

Domanda 15. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \arctan(\log \sin x)$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 19 luglio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare il limite della seguente successione:

$$a_n = \frac{\log(n!)}{n^2}$$

Soluzione

Utilizzando la maggiorazione $n! \leq n^n$ si ottiene che

$$0 \leq \frac{\log(n!)}{n^2} \leq \frac{\log(n^n)}{n^2} = \frac{n\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n}$$

ed essendo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$, il teorema dei carabinieri ci garantisce che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Alternativamente si può utilizzare la formula di Stirling per l'andamento asintotico del fattoriale: $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Quindi

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left(\log \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} + \log\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)$$

Dalla formula di Stirling si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\log n - 1) + \frac{1}{2}(\log n + \log(2\pi))}{n^2} = 0$$

Ne segue che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esercizio 2 Trovare tutti gli $\alpha > 0$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\cos x}{\log(1+|x|)}\right)^{\alpha} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $\mathbb{R}$.

Soluzione

La funzione f è sicuramente derivabile in tutti i punti dove $1-\cos x \neq 0$ essendo composizione e quoziente di funzioni derivabili (il denominatore si annulla solo per $x=0$). Nel punto $x=0$ calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\log(1+|x|)}\right)^{\alpha}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{|x|+o(x)}\right)^{\alpha}\frac{1}{x} =$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}\,\mathrm{sgn}x+o(x)}{1+o(1)}\right)^{\alpha}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha}}{x}\left(\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}\right)^{\alpha}$$

Se $0<\alpha\leq 1$ il limite non esiste (il limite destro è diverso dal sinistro), mentre se $\alpha > 1$ il limite vale 0. Quindi la funzione f è derivabile in $x=0$ per tutti e soli gli $\alpha \geq 1$. Se invece $x = 2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ e $k\neq 0$, dobbiamo valutare il limte del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 2k\pi}\frac{1}{x-2k\pi}\left(\frac{1-\cos x}{\log(1+|x|)}\right)^{\alpha}$$

Eseguiamo la sostituzione $y = x-2k\pi$ ottenendo:

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{1-\cos y}{\log(1+|y+2k\pi|)}\right)^{\alpha} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{\frac{y^2}{2}+o(y^2)}{\log(1+|y+2k\pi|)}\right)^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\log(1+|2k\pi|)}\lim_{y\to 0}\frac{|y|^{2\alpha}}{y}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)^{\alpha}$$

e questo limite esiste se solo se $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Infatti se $0<\alpha\leq\dfrac{1}{2}$ il limite destro è diverso da quello sinistro. In conclusione la funzione f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ per $\alpha > 1$.

Esercizio 3 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty} e^{-n^2x^2}\,dx.$$

Soluzione

Fissato $M > 1$ ed eseguendo la sostituzione $nx = t$ si ha che:

$$\int_1^{M} e^{-n^2x^2}\,dx = \frac{1}{n}\int_n^{Mn} e^{-t^2}\,dt$$

quindi, passando al limite per $M \to \infty$ si ottiene che

$$\int_1^{\infty} e^{-n^2x^2}\,dx = \frac{1}{n}\int_n^{\infty} e^{-t^2}\,dt \le \frac{1}{n}\int_1^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Dato che l'ultimo integrale è convergente, la funzione e^{-t^2} è maggiorabile ad esempio con $\dfrac{1}{t^2}$, si ha che

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty} e^{-n^2x^2}\,dx \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 0$$

e il limite cercato vale 0.