Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica I

Pisa, 28 giugno 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

**Domanda 1** Sia $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}, \qquad x \neq 0$. Allora

A) $\int\limits_7^{+\infty} f(x)\,dx$ converge B) $\int\limits_3^{200} f(x)\,dx$ non converge

C) $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste D) $\int\limits_0^{3} |f(x)|\,dx$ converge

A

**Domanda 2** La funzione $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{\sin(x^2)}{2}\right)$ ha la stessa parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, di:

A) $\dfrac{1}{2}\tan(x^2)$ B) $\sin(x^3)$ C) $x + \sin(x^2)$ D) $1 + \dfrac{\sin^2 x}{2}$

A

**Domanda 3** Sia $(a_n)$ una successione di numeri reali tale che $a_n \geq a_{n+1}$ e $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, necessariamente

A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ B) la successione $(a_n)$ diverge positivamente

C) esiste finito il limite di $(a_n)$ D) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

C

**Domanda 4** Dato $x < 0$ risulta $\log(x^6) =$

A) $6\log(-x)$ B) $6\log x$ C) $-(\log x)^6$ D) non è definito

A

**Domanda 5** Sia $z = \left(\sqrt{6} - 3i\right)^4$. Allora $|z| =$

A) $9^4$ B) $15^2$ C) $6^2$ D) $15^4$

B

**Domanda 6** Le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 + 8 = 0$ sono:

A) $z = -2$ con molteplicità 3 B) $z = -2$ con molteplicità 1

D

C) nessuna soluzione D) 3 soluzioni distinte

**Domanda 7** Sia $(a_n)$ una qualsiasi successione monotona crescente. Allora:

A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge B) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

D

C) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge D) se $a_n \leq -2 \ \forall n \in \mathbb{N}$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

**Domanda 8** Data $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ poniamo, per ogni $x > 1$, $F(x) = \int_2^{\arctan x} f'(t)\,dt$. Allora:

A) $F(x) = f'(\arctan x)$ B) $F(x) = f(\arctan x) - f(2)$

B

C) $F'(x) = f(x)$ D) $F'(x) = f(\arctan x)$

**Domanda 9** Sia $f(x) = (\log x)^x, \quad x > 1$. Allora

A) $f'(x) = x^{\log x}$ B) $f'(x) = (\log x)^x \left(\log\log x + \dfrac{1}{\log x}\right)$

B

C) $f$ non è derivabile D) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\log x}$

**Domanda 10** L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : \ 3x - \dfrac{1}{x} > 0\right\}$ è:

B

A) superiormente limitato B) inferiormente limitato C) vuoto D) limitato

Rispondere alle seguenti 5 domande inserendo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata o mancante vale 0.

$\boxed{z_1 = -2i,\ z_2 = -4i}$

**Domanda 11** Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(3i + z)^2 = -1$.

$\boxed{0}$

**Domanda 12** Calcolare, se esiste $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n + n^4}{n!}}$

$\boxed{\text{diverge positivamente}}$

**Domanda 13** Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 11)^n}{11n + 2}$

$\boxed{\alpha > \frac{1}{3}}$

**Domanda 14** Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3\alpha}}\, dx$.

$\boxed{0}$

**Domanda 15** Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^4 \log\left(1 + e^{2x}\right)$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica I

Pisa, 28 giugno 2005

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| |_|_|_|_|_|_|

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1** Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{1-4x^2} + \left|2x + \frac{1}{2}\right|$ trovandone in particolare gli eventuali punti di massimo e minimo locali e assoluti (oppure estremo superiore e inferiore).

### Soluzione

La funzione è definita per gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $1 - 4x^2 \geq 0$, quindi per $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Osserviamo che $f$ è continua, perché somma e composizione di funzioni continue, quindi sul suo insieme di definizione che è limitato e chiuso, ammette massimo e minimo assoluti per il teorema di Weierstrass. La $f$ è anche derivabile almeno nei punti dove non si annullano il valore assoluto o l'argomento della radice. Dovremo quindi valutare la derivabilità nei punti $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. La derivata di $f$ (dove esiste) è la seguente:

$$f'(x) = \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}} + 2\,\mathrm{sgn}\left(2x + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}} + 2 & \text{se } -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}} - 2 & \text{se } -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Dato che $f$ è continua nel punto $x = -\frac{1}{4}$ possiamo calcolare le derivate destra e sinistra attraverso il limite di $f'$:

$$f'_-\left(-\frac{1}{4}\right) = \lim_{x \to -\frac{1}{4}^-} f'(x) = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad f'_+\left(-\frac{1}{4}\right) = \lim_{x \to -\frac{1}{4}^+} f'(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Le due derivate sono diverse fra loro ma finite entrambe, quindi $x = -\frac{1}{4}$ è un punto angoloso della funzione. Calcoliamo ora la derivata destra e sinistra negli estremi:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f'(x) = -\infty$$

quindi la $f$ non è derivabile negli estremi del suo insieme di definizione dove il suo grafico ha tangente verticale. Studiamo il segno di $f'$. Risulterà $f'(x) \geq 0$ quando

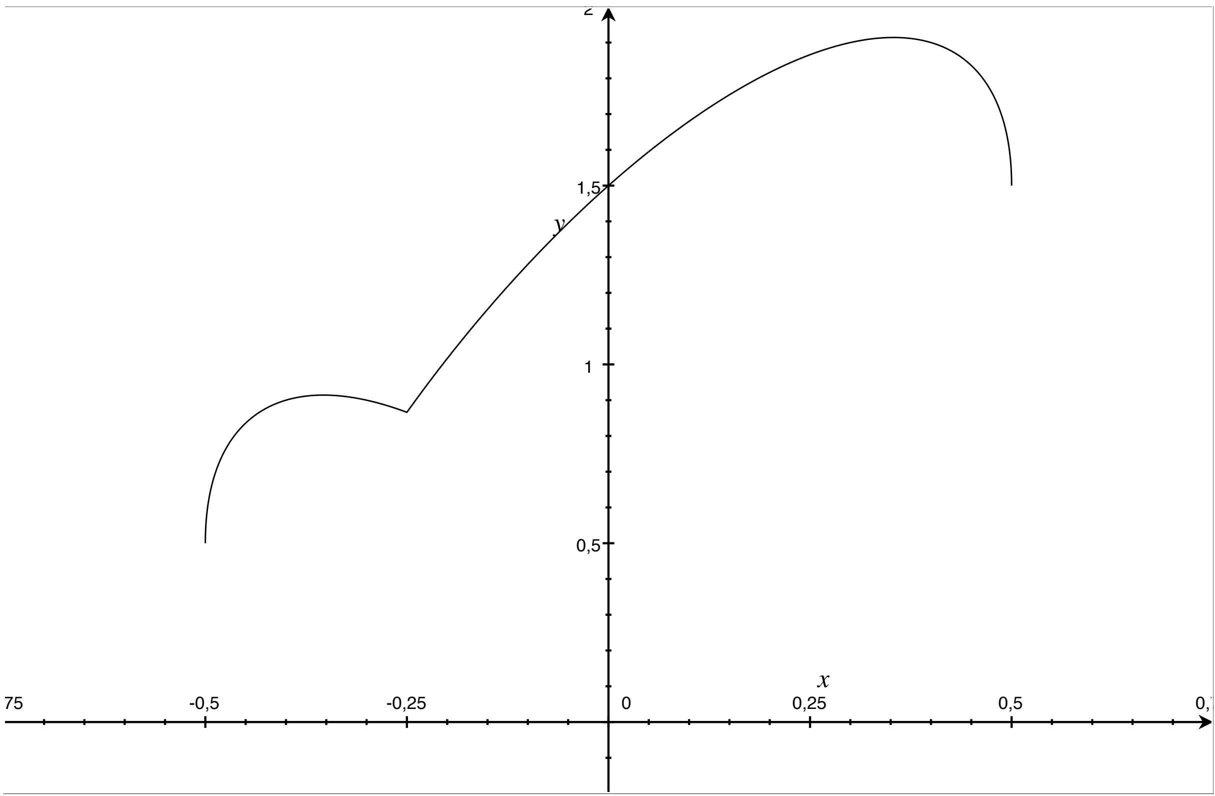
$$\begin{cases} \dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}} + 2 \geq 0 \\ -\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}} - 2 \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2} < x < -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il primo sistema di disequazioni ha come soluzione l'insieme $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$, mentre il secondo l'insieme $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$. La $f$ risulta quindi crescente nei due intervalli trovati e decrescente negli intervalli

$(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})$ e $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$. I punti $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ sono quindi di minimo locale, mentre i punti $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ sono di massimo locale. Per trovare il massimo e il minimo assoluti basta valutare la $f$ in tutti questi punti:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

quindi il massimo è $\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}$ e il minimo è $\dfrac{1}{2}$.



**Esercizio 2** Stabilire se esiste, ed eventualmente calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin^2 x}{\left(e^{(x^2)}-1\right)\left(e^x-1\right)}$.

**Soluzione**

Ricordando che, per $t \to 0$ risulta

$$\sin t = t + o(t), \qquad e^t = 1 + t + o(t)$$

si ottiene

$$\frac{x \sin^2 x}{\left(e^{(x^2)}-1\right)\left(e^x-1\right)} = \frac{x\,(x+o(x))^2}{(1+x^2+o(x^2)-1)\,(1+x+o(x)-1)} = \frac{x\,(x^2+o(x^2))}{x^3+o(x^3)} = \frac{x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} \longrightarrow 1.$$

**Esercizio 3** Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 5 nel punto $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = (\log(1+x))^2 \,.$$

**Soluzione**

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor del logaritmo:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

quindi, eseguendo il quadrato ed eliminando tutti i termini inifinitesimi di ordine superiore a $x^5$, si ottiene:

$$(\log(1+x))^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{3}x^5 + o(x^5) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^5 + o(x^5)$$

quindi il polinomio cercato, che è l'unico polinomio di grado 5 che differisce da $f$ per un infinitesimo superiore a $x^5$, è:

$$P_5(x) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^5.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica I

Pisa, 28 giugno 2005

| | | |
|---|---|---|
| (Cognome) | (Nome) | (Numero di matricola) |

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

**Domanda 1** Sia $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}, \qquad x \neq 0$. Allora

A) $\int_7^{+\infty} f(x)\,dx$ converge B) $\int_3^{200} f(x)\,dx$ non converge

C) $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste D) $\int_0^3 |f(x)|\,dx$ converge

A

**Domanda 2** Data $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ poniamo, per ogni $x > 0$, $F(x) = \int_{x\log x}^{1} f'(t)\,dt$. Allora:

A) $F(x) = f(x \log x)$ B) $F'(x) = -f'(x \log x)$

C) $F'(x) = f(x)$ D) $F(x) = f(1) - f(x \log x)$

D

**Domanda 3** Sia $(a_n)$ una successione di numeri reali tale che $a_n \geq a_{n+1}$ e $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, necessariamente

A) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ B) la successione $(a_n)$ diverge positivamente

C) esiste finito il limite di $(a_n)$ D) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

C

**Domanda 4** La funzione $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{\sin(x^2)}{2}\right)$ ha la stessa parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, di:

A) $\dfrac{1}{2}\tan(x^2)$ B) $\sin(x^3)$ C) $x + \sin(x^2)$ D) $1 + \dfrac{\sin^2 x}{2}$

A

**Domanda 5** L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} :\ 2x + \dfrac{1}{x} > 0\right\}$ è:

A) inferiormente limitato B) superiormente limitato C) limitato D) vuoto $\boxed{A}$

**Domanda 6** Sia $z = \left(2 - \sqrt{5}i\right)^6$. Allora $|z| =$

A) $9^6$ B) $7^6$ C) $5^3$ D) $9^3$

D

**Domanda 7** Le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 + 8 = 0$ sono:

A) $z = -2$ con molteplicità 3 B) $z = -2$ con molteplicità 1

C) nessuna soluzione D) 3 soluzioni distinte

D

**Domanda 8** Sia $f(x) = (\log x)^x, \quad x > 1$. Allora

A) $f'(x) = x^{\log x}$ B) $f'(x) = (\log x)^x \left(\log \log x + \dfrac{1}{\log x}\right)$

C) $f$ non è derivabile D) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\log x}$

B

**Domanda 9** Sia $(a_n)$ una qualsiasi successione monotona crescente. Allora:

A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge B) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

C) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge D) se $a_n \le -2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

D

**Domanda 10** Dato $x > 0$ risulta $\log(-x)^4 =$

A) $4\log(-x)$ B) $4\log x$ C) $(-\log x)^4$ D) non è definito

B

Rispondere alle seguenti 5 domande inserendo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata o mancante vale 0.

$\boxed{z_1 = 0,\ z_2 = 4i}$

**Domanda 11** Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(z - 2i)^2 = -4$.

$\boxed{\text{converge}}$

**Domanda 12** Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{7n+2}$

$\boxed{\alpha > \frac{1}{3}}$

**Domanda 13** Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3\alpha}}\, dx$.

$\boxed{0}$

**Domanda 14** Calcolare, se esiste $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n + n^4}{n!}}$

$\boxed{0}$

**Domanda 15** Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^6 \log\left(1 + e^{-3x}\right)$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica I

Pisa, 28 giugno 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1** Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 6 nel punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \cos^2 x$.

**Soluzione**

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor del coseno:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

quindi, eseguendo il quadrato ed eliminando tutti i termini inifinitesimi di ordine superiore a $x^6$, si ottiene:

$$\cos^2 x = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{360} - \frac{x^6}{24} + o(x^6) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$$

quindi il polinomio cercato, che è l'unico polinomio di grado 6 che differisce da $f$ per un infinitesimo superiore a $x^6$, è:

$$P_6(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6.$$

**Esercizio 2** Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \left|\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right|$ trovandone in particolare gli eventuali punti di massimo e minimo locali e assoluti (oppure estremo superiore e inferiore).

**Soluzione**

La funzione è definita per gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $1 - \frac{x^2}{4} \geq 0$, quindi per $-2 \leq x \leq 2$. Osserviamo che $f$ è continua, perché somma e composizione di funzioni continue, quindi sul suo insieme di definizione che è limitato e chiuso, ammette massimo e minimo assoluti per il teorema di Weierstrass. La $f$ è anche derivabile almeno nei punti dove non si annullano il valore assoluto o l'argomento della radice. Dovremo quindi valutare la derivabilità nei punti $-2,\ 1,\ 2$. La derivata di $f$ (dove esiste) è la seguente:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} - \operatorname{sgn}(1-x)\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - 1\right) & \text{se } -2 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1\right) & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Dato che $f$ è continua nel punto $x = 1$ possiamo valutare le derivate destra e sinistra calcolando il limite di $f'$:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to -1^-} f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right), \qquad f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Le due derivate sono diverse fra loro ma finite entrambe, quindi $x = 1$ è un punto angoloso della funzione. Calcoliamo ora la derivata destra e sinistra negli estremi:

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty$$

quindi la $f$ non è derivabile negli estremi del suo insieme di definizione dove il suo grafico ha tangente verticale. Studiamo il segno di $f'$. Risulterà $f'(x) \geq 0$ quando

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - 1\right) \geq 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1\right) \geq 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Il primo sistema di disequazioni ha come soluzione l'insieme $(-2, -\sqrt{2})$, mentre il secondo l'insieme $(1, \sqrt{2})$. La $f$ risulta quindi crescente nei due intervalli trovati e decrescente negli intervalli $(-\sqrt{2}, 1)$ e $(\sqrt{2}, 2)$. I punti $-2,\ 1,\ 2$ sono quindi di minimo locale, mentre i punti $-\sqrt{2},\ \sqrt{2}$ sono di massimo locale. Per trovare il massimo e il minimo assoluti basta valutare la $f$ in tutti questi punti:

$$f(-2) = \frac{3}{2}, \quad f\left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

quindi il massimo è $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ e il minimo è $\frac{1}{2}$.

**Esercizio 3** Stabilire se esiste, ed eventualmente calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin^2 x}{\left(e^{(x^2)}-1\right)\left(e^x-1\right)}$.

**Soluzione**

Ricordando che, per $t\to 0$ risulta

$$\sin t = t + o(t), \qquad e^t = 1 + t + o(t)$$

si ottiene

$$\frac{x\sin^2 x}{\left(e^{(x^2)}-1\right)\left(e^x-1\right)} = \frac{x\left(x+o(x)\right)^2}{\left(1+x^2+o(x^2)-1\right)\left(1+x+o(x)-1\right)} = \frac{x\left(x^2+o(x^2)\right)}{x^3+o(x^3)} = \frac{x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} \longrightarrow 1.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica I

Pisa, 28 giugno 2005

| | | |
|---|---|---|
| (Cognome) | (Nome) | (Numero di matricola) |

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

**Domanda 1** Sia $(a_n)$ una qualsiasi successione monotona decrescente. Allora, necessariamente:

A) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge B) se $a_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

C) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge D) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

B

**Domanda 2** Le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^7 + 1 = 0$ sono:

A) $z = -1$ con molteplicità 1 B) $z = -1$ con molteplicità 7

C) 7 soluzioni distinte D) nessuna soluzione

C

**Domanda 3** Sia $f(x) = x^{\log x}, \quad x > 0$. Allora

A) $f$ non è derivabile B) $f'(x) = \dfrac{2\log x}{x}\, e^{(\log x)^2}$

C) $f'(x) = \dfrac{x \log x}{x}$ D) $f'(x) = \dfrac{e^{x\log x}}{x^2}$

B

**Domanda 4** Sia $z = \left(\sqrt{6} - 3i\right)^4$. Allora $|z| =$

A) $9^4$ B) $15^2$ C) $6^2$ D) $15^4$

B

**Domanda 5** La funzione $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{\sin(x^2)}{2}\right)$ ha la stessa parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, di:

A) $\dfrac{1}{2}\tan(x^2)$ B) $\sin(x^3)$ C) $x + \sin(x^2)$ D) $1 + \dfrac{\sin^2 x}{2}$

A

**Domanda 6** Dato $x > 0$ risulta $\log(-x)^4 =$

$\boxed{\text{B}}$

A) $4\log(-x)$ B) $4\log x$ C) $(-\log x)^4$ D) non è definito

**Domanda 7** Data $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ poniamo, per ogni $x > 1$, $F(x) = \int\limits_2^{\arctan x} f'(t)\,dt$. Allora:

A) $F(x) = f'(\arctan x)$ B) $F(x) = f(\arctan x) - f(2)$

$\boxed{\text{B}}$

C) $F'(x) = f(x)$ D) $F'(x) = f(\arctan x)$

**Domanda 8** Sia $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^3}$, $x \neq 0$. Allora

A) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ converge B) $\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste

$\boxed{\text{C}}$

C) $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge D) $\int\limits_4^7 f(x)\,dx$ non converge

**Domanda 9** Sia $(a_n)$ una successione di numeri reali tale che $a_n \leq a_{n+1}$ e $a_n \geq 8$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora necessariamente

A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 8$ B) esiste finito il limite di $(a_n)$

$\boxed{\text{D}}$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ D) nessuna delle precedenti

**Domanda 10** L'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : \; 3x - \dfrac{1}{x} > 0\right\}$ è:

$\boxed{\text{B}}$

A) superiormente limitato B) inferiormente limitato C) vuoto D) limitato

Rispondere alle seguenti 5 domande inserendo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata o mancante vale 0.

**Domanda 11** Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(3i+z)^2 = -1$.

$\boxed{z_1 = -2i,\ z_2 = -4i}$

**Domanda 12** Calcolare, se esiste $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{6^n + n^4}{n!}}$

$\boxed{0}$

**Domanda 13** Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 11)^n}{11n+2}$

$\boxed{\text{diverge positivamente}}$

**Domanda 14** Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 \log(1+e^{2x})$.

$\boxed{0}$

**Domanda 15** Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3\alpha}}\, dx$.

$\boxed{\alpha > \dfrac{1}{3}}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica I

Pisa, 28 giugno 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1** Stabilire se esiste, ed eventualmente calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{\sin x}-1\right)\left(e^{(x^2)}-1\right)}{x\tan^2 x}$

**Soluzione**

Ricordando che, per $t \to 0$ risulta

$$\sin t = t + o(t), \qquad e^t = 1 + t + o(t), \qquad \tan t = t + o(t)$$

si ottiene

$$\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)\left(e^{(x^2)}-1\right)}{x\tan^2 x} = \frac{(1+\sin x + o(\sin x) - 1)\,(1 + x^2 + o(x^2) - 1)}{x\,(x+o(x))^2} =$$

$$= \frac{(x+o(x))(x^2+o(x^2))}{x^3+o(x^3)} = \frac{x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} \longrightarrow 1.$$

**Esercizio 2** Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \left|\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right|$ trovandone in particolare gli eventuali punti di massimo e minimo locali e assoluti (oppure estremo superiore e inferiore).

### Soluzione

La funzione è definita per gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $1 - \frac{x^2}{4} \geq 0$, quindi per $-2 \leq x \leq 2$. Osserviamo che $f$ è continua, perché somma e composizione di funzioni continue, quindi sul suo insieme di definizione che è limitato e chiuso, ammette massimo e minimo assoluti per il teorema di Weierstrass. La $f$ è anche derivabile almeno nei punti dove non si annullano il valore assoluto o l'argomento della radice. Dovremo quindi valutare la derivabilità nei punti $-2,\ 1,\ 2$. La derivata di $f$ (dove esiste) è la seguente:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} - \operatorname{sgn}(1-x)\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - 1\right) & \text{se } -2 < x < 1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1\right) & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Dato che $f$ è continua nel punto $x = 1$ possiamo valutare le derivate destra e sinistra calcolando il limite di $f'$:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right), \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Le due derivate sono diverse fra loro ma finite entrambe, quindi $x = 1$ è un punto angoloso della funzione. Calcoliamo ora la derivata destra e sinistra negli estremi:

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$$

quindi la $f$ non è derivabile negli estremi del suo insieme di definizione dove il suo grafico ha tangente verticale. Studiamo il segno di $f'$. Risulterà $f'(x) \geq 0$ quando

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - 1\right) \geq 0 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1\right) \geq 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Il primo sistema di disequazioni ha come soluzione l'insieme $(-2, -\sqrt{2})$, mentre il secondo l'insieme $(1, \sqrt{2})$. La $f$ risulta quindi crescente nei due intervalli trovati e decrescente negli intervalli $(-\sqrt{2}, 1)$ e $(\sqrt{2}, 2)$. I punti $-2,\ 1,\ 2$ sono quindi di minimo locale, mentre i punti $-\sqrt{2},\ \sqrt{2}$ sono di massimo locale. Per trovare il massimo e il minimo assoluti basta valutare la $f$ in tutti questi punti:

$$f(-2) = \frac{3}{2}, \quad f\left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

quindi il massimo è $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ e il minimo è $\frac{1}{2}$.

**Esercizio 3** Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 6 nel punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \cos^2 x$.

### Soluzione

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor del coseno:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

quindi, eseguendo il quadrato ed eliminando tutti i termini inifinitesimi di ordine superiore a $x^6$, si ottiene:

$$\cos^2 x = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{360} - \frac{x^6}{24} + o(x^6) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$$

quindi il polinomio cercato, che è l'unico polinomio di grado 6 che differisce da $f$ per un infinitesimo superiore a $x^6$, è:

$$P_6(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6.$$