Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 7 giugno 2005

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia Ω l'insieme $\{-n-1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\dfrac{3}{n^3+1} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$. L'estremo superiore di Ω è:

$\boxed{\text{B}}$

A) $+\infty$ B) 3 C) 0 D) $-\infty$

Domanda 2 Sia Ω l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ 2\log(x^4) < 7\}$. L'estremo superiore di Ω è:

$\boxed{\text{B}}$

A) $e^{\frac{2}{7}}$ B) $e^{\frac{7}{8}}$ C) $+\infty$ D) 0

Domanda 3 $\arctan\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) =$

$\boxed{\text{D}}$

A) $-\infty$ B) non è definita C) $-\dfrac{\pi}{2}$ D) $\dfrac{\pi}{4}$

Domanda 4 Dati $z, w \in \mathbb{C}$ con $zw = 1$ e $|w| = 1$ risulta necessariamente:

$\boxed{\text{D}}$

A) $z = w$ B) $z = 1$ C) $z = \overline{z}$ D) $z = \overline{w}$

Domanda 5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} =$

$\boxed{\text{C}}$

A) non esiste B) 1 C) 0 D) $+\infty$

Domanda 6 Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora:

A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge B) (a_n) è infinitesima

$\boxed{\text{C}}$

C) esiste $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

Domanda 7 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ allora:

A) f è continua nel punto $x = 1$ B) $\lim_{n\to\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = f(1)$

C) $\lim_{n\to\infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 4$ D) $f(1) = 4$

C

Domanda 8 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente, continua e non negativa, definiamo $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Allora:

A) F è crescente e limitata B) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

C) $F(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ D) F è convessa

D

Domanda 9 $\arctan\tan\left(\frac{11}{4}\pi\right) =$

A) $-\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{11}{4}\pi$ C) 1 D) non esiste

A

Domanda 10 $\frac{1}{3+2i} =$

A) $3i - 2$ B) $3 + 2i$ C) $\frac{2}{13}i - \frac{3}{13}$ D) $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

D

Domanda 11 In quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è vera la seguente disuguaglianza:

$$\boxed{(-\infty, 6-\sqrt{35}) \cup (6+\sqrt{35}, +\infty)}$$

$3x(x+4) < 4x^2 + 1$

Domanda 12 Trovare parte reale e immaginaria del seguente numero complesso:

$$\boxed{\Re(z) = 10,\ \Im(z) = -1}$$

$$z = \frac{(2+i)(5-\frac{i}{2})}{1+\frac{i}{2}}.$$

$$\boxed{0}$$

Domanda 13 Calcolare $\lim_{n\to\infty} \log(n+1) - \log n$.

$$\boxed{0}$$

Domanda 14 Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} \frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9}$.

$$\boxed{2}$$

Domanda 15 Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 7 giugno 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\cos x}{1 + 2\sin x - \cos^2 x}\, dx$$

Soluzione

$$\int \frac{\cos x}{1 + 2\sin x - \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x}\, dx$$

eseguendo la sostituzione $\sin x = t$ si ottiene:

$$\int \frac{dt}{t^2 + 2t} = \int \frac{dt}{(t+2)t}$$

L'integranda è una funzione razionale. Cerchiamo quindi due numeri A e B tali che

$$\frac{1}{t^2 + t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2}.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$. Quindi

$$\int \frac{dt}{(t+2)t} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+2}\right) = \frac{1}{2}(\log|t| - \log|t+2|) + c = \frac{1}{2}\left(\log|\sin x| - \log|2 + \sin x|\right) + c.$$

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa. Quante soluzioni al massimo può avere l'equazione $f(x) = 1$?

Soluzione

Il numero massimo di soluzioni è due. Per convincersi che ce ne possono essere due basta pensare al caso della parabola $f(x) = x^2$. Per dimostrare che non possono essere più di due si usa la definizione di convessità. Supponendo che ci siano tre soluzioni $x_1 < x_2 < x_3$, posso trovare un numero $t \in (0, 1)$ tale che $x_2 = tx_1 + (1 - t)x_3$ (facendo i calcoli $t = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$). Allora risulta:

$$f(x_2) = f\left(tx_1 + (1 - t)x_3\right) < tf(x_1) + (1 - t)f(x_3) = t \cdot 1 + (1 - t)\,1 = 1$$

mentre dovrebbe essere $f(x_2) = 1$.

Esercizio 3 Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{2}{x-1}}$ determinandone in particolare gli estremi superiore e inferiore, gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti e la convessità.

Soluzione

La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calcoliamo i limiti al bordo del campo di esistenza:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

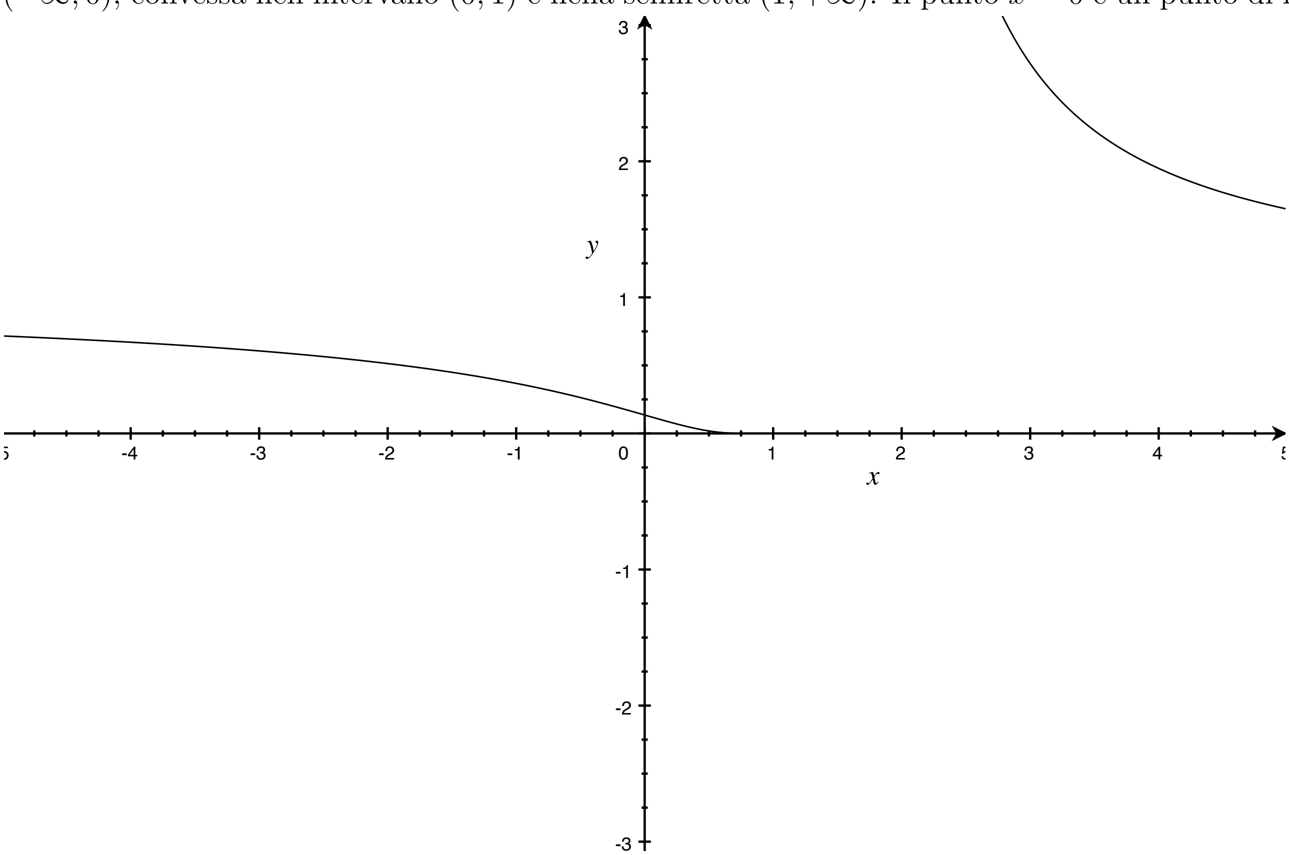
Avremo quindi un asintoto orizzontale $y = 1$ e uno verticale $x = 1$. Osserviamo ora che $f(x) > 0$ per ogni x, e questo, insieme al fatto che $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$ ci assicura che $\inf f = 0$. Invece da $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ si ha che $\sup f = +\infty$. Vediamo ora se ci sono massimi o minimi locali. La f è definita su un insieme aperto ed è derivabile in ogni punto, quindi in un eventuale punto di max o min locale dovrà essere $f' = 0$. Calcoliamo f':

$$f'(x) = \frac{-2e^{\frac{2}{x-1}}}{(x-1)^2} < 0 \qquad \forall x \neq 1.$$

Ne segue che non ci sono max o min locali, quindi neanche assoluti. La funzione risulta decrescente nelle semirette $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$. Per la convessità calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4xe^{\frac{2}{x-1}}}{(x-1)^4}.$$

Risulta quindi $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$. Ne segue che f è concava nella semiretta $(-\infty, 0)$, convessa nell'intervallo $(0, 1)$ e nella semiretta $(1, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è un punto di flesso.



Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 7 giugno 2005

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo la lettera corrispondente all'unico risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 1, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

Domanda 1 Sia Ω l'insieme $\{1-3n : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\dfrac{5}{n^2+2} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. L'estremo superiore di Ω è:

D

A) $-\infty$ B) 0 C) $+\infty$ D) $\dfrac{5}{2}$

Domanda 2 Sia Ω l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ 3\log(x^2) < 5\}$. L'estremo superiore di Ω è:

C

A) $+\infty$ B) $e^{3/2}$ C) $e^{5/6}$ D) 0

Domanda 3 $\arctan \cos \pi =$

A

A) $-\dfrac{\pi}{4}$ B) π C) non è definita D) $+\infty$

Domanda 4 Dati $z, w \in \mathbb{C}$ con $zw = -1$ e $|w| = 1$ risulta necessariamente:

A

A) $z = -\overline{w}$ B) $z = \overline{w}$ C) $z = 1$ D) $z = -w$

Domanda 5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+3)}{n^2+3} =$

D

A) non esiste B) $+\infty$ C) 1 D) 0

Domanda 6 Se $a_n \leq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora:

A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge negativamente B) (a_n) è decrescente

D

C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ converge D) la successione $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ è monotona

Domanda 7 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ allora:

A) $\lim_{n\to\infty} f\left(3 + \frac{1}{n^2}\right) = f(3)$ B) f è continua nel punto $x = 3$

C) $f(3) = 2$ D) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{3n^2}{n^2+1}\right) = 2$

D

Domanda 8 Data $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ decrescente, continua e non negativa, definiamo $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Allora:

A) F è concava B) F è decrescente

C) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ D) $F(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

A

Domanda 9 $\arctan\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right) =$

A) $-\frac{3}{4}\pi$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) non esiste D) 1

B

Domanda 10 $\frac{i}{3i-2} =$

A) $\frac{2}{13}i + \frac{3}{13}$ B) $2i - 3$ C) $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ D) $3i + 2$

C

Domanda 11 In quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è vera la seguente disuguaglianza:

$$\boxed{\left(-\infty, -3-\sqrt{7}\,\right] \cup \left[-3+\sqrt{7}, +\infty\right)}$$

$2x(x-3) \leq 3x^2 + 2$

Domanda 12 Trovare parte reale e immaginaria del seguente numero complesso:

$$\boxed{\Re(z) = -10,\ \Im(z) = 1}$$

$$z = \frac{(2-i)(5-\frac{i}{2})}{\frac{i}{2}-1}.$$

$$\boxed{-\log 3}$$

Domanda 13 Calcolare $\lim_{n\to\infty} \log(n^2+1) - \log(3n^2)$.

$$\boxed{-\infty}$$

Domanda 14 Calcolare $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4x+4}{x^3-6x^2+12x-8}$.

$$\boxed{-\frac{3}{2}\pi - 3}$$

Domanda 15 Calcolare $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3x\cos x\, dx$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica I

Pisa, 7 giugno 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sin x}{1 - 3\cos x - \sin^2 x}\, dx$$

Soluzione

$$\int \frac{\sin x}{1 - 3\cos x - \sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x}\, dx$$

eseguendo la sostituzione $\cos x = t$ si ottiene:

$$\int \frac{-dt}{t^2 - 3t} = \int \frac{dt}{(t-3)t}$$

L'integranda è una funzione razionale. Cerchiamo quindi due numeri A e B tali che

$$\frac{1}{t^2 - 3t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3}.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$. Quindi

$$\int \frac{dt}{(t-3)t} = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-3}\right) = \frac{1}{3}(\log|t| - \log|t-3|) + c = \frac{1}{3}\left(\log|\cos x| - \log|\cos x - 3|\right) + c.$$

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente concava. Quante soluzioni al massimo può avere l'equazione $f(x) = 3$?

Soluzione

Il numero massimo di soluzioni è 2.
Per convincersi che ce ne possono essere 2 basta pensare al caso della parabola $f(x) = -x^2 + 4$.
Per dimostrare che non possono essere più di 2 si usa la definizione di concavità. Supponendo che ci siano le 3 soluzioni $x_1 < x_2 < x_3$, posso trovare un numero $t \in (0, 1)$ tale che $x_2 = tx_1 + (1 - t)x_3$ (facendo i calcoli $t = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$). Allora risulta:

$$f(x_2) = f\left(tx_1 + (1 - t)x_3\right) > tf(x_1) + (1 - t)f(x_3) = t \cdot 3 + (1 - t)\, 3 = 3$$

mentre dovrebbe essere $f(x_2) = 3$.

Esercizio 3 Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{3}{2-x}}$ determinandone in particolare gli estremi superiore e inferiore, gli eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti e la convessità.

Soluzione

La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Calcoliamo i limiti al bordo del campo di esistenza:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Avremo quindi un asintoto orizzontale $y = 1$ e uno verticale $x = 2$. Osserviamo ora che $f(x) > 0$ per ogni x, e questo, insieme al fatto che $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$ ci assicura che $\inf f = 0$. Invece da $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ si ha che $\sup f = +\infty$. Vediamo ora se ci sono massimi o minimi locali. La f è definita su un insieme aperto ed è derivabile in ogni punto, quindi in un eventuale punto di max o min locale dovrà essere $f' = 0$. Calcoliamo f':

$$f'(x) = \frac{3e^{\frac{3}{2-x}}}{(2-x)^2} > 0 \qquad \forall x \neq 2.$$

Ne segue che non ci sono max o min locali, quindi neanche assoluti. La funzione risulta crescente nelle semirette $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$. Per la convessità calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{3e^{\frac{3}{2-x}}(7-2x)}{(2-x)^4}.$$

Risulta quindi $f''(x) > 0$ se $x < \frac{7}{2}$ e $f''(x) < 0$ se $x > \frac{7}{2}$. Ne segue che f è convessa nella semiretta $(-\infty, 2)$ e nell'intervallo $(2, \frac{7}{2})$, concava nella semiretta $(\frac{7}{2}, +\infty)$. Il punto $x = \frac{7}{2}$ è un punto di flesso.