Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica III

Pisa, 14 febbraio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1**

Studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2x^2+2} \ .$$

Dire inoltre se la convergenza è anche uniforme sull'insieme di convergenza puntuale.

**Soluzione**

Se $x \geq 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Se invece $x < 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $[0, +\infty)$ e la funzione limite è la funzione identicamente nulla $f(x) = 0$. Per la convergenza uniforme osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

quindi il teorema sullo scambio del limite ci garantisce che non ci può essere convergenza uniforme sulla semiretta $[0, +\infty)$.

**Esercizio 2**

Studiare la convergenza totale in $\mathbb{R}$ della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(5nx)}{n^2+4}$$

e della serie delle sue derivate.

**Soluzione**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(5nx)}{n^2+4} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

quindi la serie converge totalmente su tutta la retta reale. La serie delle derivate è la seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n\cos(5nx)}{n^2+4}.$$

Quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{5n\cos(5nx)}{n^2+4} \right| = 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+4} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge. Quindi la serie delle derivate non converge totalmente in $\mathbb{R}$.

**Esercizio 3**

Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma \frac{x^2 + y}{\sqrt{5 + 4z^2}}\, ds$$

dove $\gamma$ è la curva di equazione $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix}$, $1 \le t \le 5$.

**Soluzione**

La velocità della curva risulta:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |\dot\gamma(t)| = \sqrt{5 + 4t^2}.$$

Quindi

$$\int_\gamma \frac{x^2 + y}{\sqrt{5 + 4z^2}}\, ds = \int_1^5 \frac{4t^2 + t^2 - 1}{\sqrt{5 + 4t^2}} \sqrt{5 + 4t^2}\, dt = \int_1^5 5t^2 - 1\, dt = \left[\frac{5}{3}t^2 - t\right]_1^5 = \frac{125}{3} - 5 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{112}{3}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica III

Pisa, 14 febbraio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 4**

Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} xz\, d\sigma$$

dove $\Sigma$ è il grafico della funzione $f(x.y) = \sqrt{x^2+y^2}$ sul dominio triangolare $T$ nel piano $(x, y)$ di vertici $(0,0),\ (2,1),\ (-1,1)$.

**Soluzione**

La superficie è di tipo cartesiano, calcoliamo quindi $\sqrt{1+|\nabla f|^2}$.

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sqrt{1+|\nabla f|^2} = \sqrt{2}.$$

Il dominio $T$ è un insieme normale rispetto all'asse $x$ e può essere descritto nel seguente modo:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ -y \le x \le 2y\right\}$$

Quindi:

$$\int_{\Sigma} xz\, d\sigma = \int_{T} x\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\int_0^1 dy \int_{-y}^{2y} x\sqrt{x^2+y^2}\, dx = \sqrt{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2}\right]_{x=-y}^{x=2y} dy =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 (5y^2)^{3/2} - (2y^2)^{3/2}\, dy = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(5^{3/2} - 2^{3/2}\right)\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(5^{3/2} - 2^{3/2}\right).$$

## Esercizio 5

Si consideri la forma differenziale lineare $\omega(x, y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}}\,dx + \dfrac{2y}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}}\,dy$. Determinare l'insieme di definizione di $\omega$, l'insieme di esattezza e calcolarne la primitiva che nel punto $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vale $-2$.

## Soluzione

La forma differenziale è di classe $C^1$ ed è definita nell'insieme dove $1-(x-y^2)^2 > 0$, quindi nei punti $(x, y)$ tali che $|x-y^2| < 1$ che è la parte di piano compresa fra le due parabole di equazione $x = y^2 - 1$ e $x = y^2 + 1$. Eseguendo le derivate incrociate

$$X_y = 2y(x-y^2)\left(1-(x-y^2)^2\right)^{-3/2} = Y_x$$

otteniamo che $\omega$ è chiusa, quindi è anche esatta poiché il suo insieme di definizione è semplicemente connesso. Calcoliamo ora una primitiva integrando prima rispetto a $y$ ed eseguendo la sostituzione $t = x - y^2$ nell'integrale:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{2y}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}}\,dy + \phi(x) = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \phi(x) = \\ &= -\arcsin t + \phi(x) = -\arcsin(x-y^2) + \phi(x). \end{aligned}$$

Per determinare $\phi$ deriviamo rispetto a $x$ e sostituiamo nell'equazione $u_x = X$:

$$u_x = \frac{-1}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}} + \phi'(x)$$

quindi

$$\frac{-1}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}} + \phi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x-y^2)^2}}$$

e, di conseguenza

$$\phi'(x) = 0, \qquad \phi(x) = c$$

con $c$ da determinare sapendo che $u\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$u(x, y) = -\arcsin(x-y^2) + c \quad \Longrightarrow u\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + c = \frac{\pi}{6} + c$$

quindi

$$c = -2 - \frac{\pi}{6}, \qquad u(x, y) = -\arcsin(x-y^2) - 2 - \frac{\pi}{6}.$$

**Esercizio 6**

Calcolare l'integrale curvilineo:

$$\int\limits_{+\partial D} 2(x+y)\,dx + 2(x+y)\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

**Soluzione**

Utilizzando le formule di Gauss – Green si ottiene che:

$$\int\limits_{+\partial D} 2(x+y)\,dx = -\int\limits_{D} \frac{\partial}{\partial y} 2(x+y)\,dx\,dy = -2\int\limits_{D} dx\,dy$$

$$\int\limits_{+\partial D} 2(x+y)\,dy = \int\limits_{D} \frac{\partial}{\partial x} 2(x+y)\,dx\,dy = 2\int\limits_{D} dx\,dy.$$

Quindi:

$$\int\limits_{+\partial D} 2(x+y)\,dx + 2(x+y)\,dy = -2\int\limits_{D} dx\,dy + 2\int\limits_{D} dx\,dy = 0.$$