Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica III

Pisa, 26 gennaio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1**

Studiare la convergenza puntuale e uniforme sulla semiretta $[3, +\infty)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{nx + 4}$$

**Soluzione**

Dato che $x > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [3, +\infty).$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $[3, +\infty)$ e la funzione limite è la funzione identicamente nulla $f(x) = 0$. Per la convergenza uniforme dobbiamo valutare

$$\sup_{x\geq 3} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 3} f_n(x).$$

Calcoliamo la derivata di $f_n(x)$:

$$f_n'(x) = \frac{e^{-nx}(-n^2x^2 - 4nx + 4)}{(nx + 4)^2}$$

e il suo segno è positivo quando $\frac{2 - 2\sqrt{2}}{n} < x < \frac{2 + 2\sqrt{2}}{n}$. La funzione è quindi decrescente per $x > \frac{2 + 2\sqrt{2}}{n}$. Basta ora osservare che per $n \geq 2$ il punto $\frac{2 + 2\sqrt{2}}{n}$ non appartiene alla semiretta $[3, +\infty)$, quindi $f_n$ è decrescente su tutto l'insieme. Ne segue che il suo estremo superiore è il valore che la funzione assume nel punto 3. Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 3} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(3) = 0$$

che prova la convergenza uniforme della succesione sulla semiretta $[3, +\infty)$.

**Esercizio 2**

Determinare per quali valori del paramentro reale $\alpha$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n \sin^2 x + 3}}{(n+1)^\alpha}$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$.

**Soluzione**

Osserviamo che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\sqrt{n \sin^2 x + 3}}{(n+1)^\alpha} = \frac{\sqrt{n+3}}{(n+1)^\alpha}.$$

Per valutare la convergenza totale dovremo quindi decidere se converge o meno la serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(n+1)^\alpha}$. Se $\alpha \leq 0$ il termine generale della serie non è infinitesimo quindi non c'è convergenza. Se invece $\alpha > 0$ il termine generale è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

converge se e solo se $\alpha - \dfrac{1}{2} > 1$. Ne segue che la serie data converge totalmente se e solo se $\alpha > \dfrac{3}{2}$.

**Esercizio 3**

Calcolare la lunghezza della curva $\begin{pmatrix} -3t \\ 6t+1 \\ -3t+6 \end{pmatrix}$, $t \in [1,6]$, specificando di che tipo di curva si tratta.

**Soluzione**

La curva è un segmento di retta. Calcoliamo la velocità:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{9+36+9} = 3\sqrt{6}.$$

Quindi la lunghezza della curva risulta:

$$l(\gamma) = \int_1^6 3\sqrt{6}\, dt = 5 \cdot 3\sqrt{6} = 15\sqrt{6}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica III

Pisa, 26 gennaio 2005

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 4**

Calcolare il seguente integrale doppio utilizzando le formule di Gauss – Green:

$$\int_D xy\,dx\,dy, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

**Soluzione**

Ricordiamo la prima delle formule di Gauss – Green:

$$\int_D f_x\,dx\,dy = \int_{+\partial D} f\,dy.$$

Dovendo integrare sul dominio $D$ la funzione $xy$, dovremo trovare una funzione $f(x,y)$ tale che $f_x$ sia uguale a $xy$. Da un semplice calcolo diretto si ottiene che $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{2}$ risolve il problema. Quindi:

$$\int_D xy\,dx\,dy = \int_{+\partial D} \frac{x^2y}{2}\,dy.$$

Basta quindi parametrizzare la frontiera di $D$ orientata positivamente. $D$ è il quarto di cerchio di raggio 2 e centro nell'origine contenuto nel primo quadrante. La sua frontiera si compone di tre curve: due segmenti di retta e un arco di circonferenza. Una possibile parametrizzazione delle tre curve è la seguente:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1.$$

I vettori velocità delle tre curve sono:

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \qquad \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi gli integrali curvilinei sono:

$$\int_{\gamma_1} \frac{x^2y}{2}\,dy = \int_0^1 \frac{4t^2\,0}{2}\,0\,dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{x^2y}{2}\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{8\cos^2 t\sin t}{2}\,2\cos t\,dt = 8\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\sin t\,dt = 8\left[\frac{-\cos^4 t}{4}\right]_0^{\pi/2} = -2(0-1) = 2$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{x^2y}{2}\,dy = \int_0^1 0(1-2t)^2(-2)\,dt = 0.$$

Sommando i tre integrali si ottiene che:

$$\int_D xy\,dx\,dy = \int_{+\partial D} \frac{x^2y}{2}\,dy = 2.$$

## Esercizio 5

Calcolare l'area della porzione di paraboloide di equazione $y = 1 - x^2 - z^2$ compresa fra i piani $y = -\dfrac{1}{2}$ e $y = \dfrac{1}{2}$.

## Soluzione

La superficie è di tipo cartesiano ed è il grafico della funzione $f(x,z) = 1 - x^2 - z^2$ su un opportuno dominio $D$ da determinare. A tale scopo sappiamo che la superficie è compresa fra i piani $y = -\dfrac{1}{2}$ e $y = \dfrac{1}{2}$. Quindi dovranno essere soddisfatte le disuguaglianze: $-\dfrac{1}{2} \le 1 - x^2 - z^2 \le \dfrac{1}{2}$ che sono equivalenti a $\dfrac{1}{2} \le 1 - x^2 - z^2 \le \dfrac{3}{2}$. Il dominio $D$ è quindi la corona circolare di centro l'origine e raggi $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ e $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. In coordinate polari il dominio $D$ si trasforma nel rettangolo

$$T = \{(\rho, \theta) : \sqrt{\frac{1}{2}} \le \rho \le \sqrt{\frac{3}{2}},\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

L'area della superficie è data dalla formula:

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dz = \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}$$

che, passando in coordinate polari diventa:

$$\int_T \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho = 2\pi \left[ (1 + 4\rho^2)^{3/2}\, \frac{2}{3}\, \frac{1}{8} \right]_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{6} \left( 7^{3/2} - 3^{3/2} \right).$$

**Esercizio 6**

Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \left(\frac{3}{1+(3x+2y)^2} + \frac{2}{2x+y}\right) dx + \left(\frac{2}{1+(3x+2y)^2} + \frac{1}{2x+y} + 4y\right) dy.$$

Dire se $\omega$ è esatta specificando eventualmente su quali insiemi. Determinare il potenziale di $\omega$ che vale 4 nel punto $(2,-3)$.

**Soluzione**

La forma differenziale è definita ed è di classe $C^1$ sull'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -2x\}$. Indichiamo con $X$ e $Y$ i coefficienti di $\omega$ e verifichiamone la chiusura:

$$X_y = \frac{-12(3x+2y)}{\left(1+(3x+2y)^2\right)^2} - \frac{2}{(2x+y)^2} = Y_x.$$

L'insieme $\Omega$ non è connesso ma è unione di due semipiani che sono insiemi connessi e semplicemente connessi: $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -2x\}$, $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -2x\}$. La forma differenziale è quindi esatta sia in $\Omega_1$ che in $\Omega_2$. Calcoliamone una primitiva integrando prima rispetto alla variabile $x$:

$$u(x,y) = \int \frac{3}{1+(3x+2y)^2} + \frac{2}{2x+y}\, dx + \phi(y) = \arctan(3x+2y) + \log|2x+y| + \phi(y)$$

con $\phi$ funzione da determinare. Deriviamo ora rispetto a $y$:

$$u_y = \frac{2}{1+(3x+2y)^2} + \frac{1}{2x+y} + \phi'(y)$$

e, uguagliando questa espressione a $Y$ si ottiene:

$$\phi'(y) = 4y$$

quindi:

$$\phi(y) = \int 4y\, dy + c = 2y^2 + c$$

con $c$ costante da determinare. Risulta allora:

$$u(x,y) = \arctan(3x+2y) + \log|2x+y| + 2y^2 + c.$$

Imponendo che sia $u(2,-3) = 4$ si ottiene:

$$\arctan 0 + \log 1 + 18 + c = 4$$

quindi $c = -14$ e

$$u(x,y) = \arctan(3x+2y) + \log|2x+y| + 2y^2 - 14.$$